

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXVII

No. 2

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: B. BROUWER

CONTENTS

In memoriam, p. 30.

H. J. JORDAN: "Die Tonusmuskeln der Aktinie *Metridium dianthus*. Ihre Eigenschaften werden verglichen mit denjenigen von plastischem Kautschuk", p. 31.

F. A. VENING MEINESZ: "Gravity and the Hypothesis of Convection-Currents in the Earth", p. 37.

J. VERSLUYS: "Determination of capillarity constant by means of two spherical segments", p. 45.

JAN DE VRIES: "Besondere Monoide", p. 47.

R. WEITZENBÖCK: "Die Invarianten bezüglich einer einzelnen linearen Transformation in n Veränderlichen", p. 50.

ERNST COHEN und J. S. BUY: "Ist flüssiges Benzol allotrop?". (Erste Mitteilung), p. 55.

F. M. JAEGER and W. A. VEENSTRA: "The Exact Measurement of the Specific Heats of Solid Substances at Higher Temperatures. XIII. The Specific Heats of Vanadium, Niobium, Tantalum and Molybdenum from 0° to 1500° C.", p. 61.

F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM: "The Exact Measurement of the Specific Heats of Solid Substances at Higher Temperatures. XIV. The Specific Heats and Thermal Retardation-Phenomena of Beryllium", p. 67.

S. W. VISSER: "On anomalies of terrestrial magnetism", p. 76.

G. F. C. GRISS: "Die Differentialinvarianten eines Systems von n relativen kovarianten Vektoren in R_n ". (Communicated by Prof. R. WEITZENBÖCK), p. 82.

F. DE KOK: "Ueber FEJÉRS Summierung der FOURIERSchen Reihe". (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 88.

N. H. KOLKMEYER and A. N. J. HEYN: "The Hydration Film of Cellulose in Cell-Walls". (Communicated by Prof. ERNST COHEN), p. 92.

W. BEIJERINCK: "Humusortstein und Bleichsand als Bildungen entgegengesetzter Klimate", (Communicated by Prof. H. A. BROUWER), p. 93.

A. W. H. VAN HERK and N. P. BADENHUIZEN: "Über die Atmung und Katalase-wirkung im Sauromatumkolben". (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 99.

C. STUART and C. J. KAMP: "The electric organ and its innervation in *Malapterurus electricus*". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 106.

F. J. NIEUWENHUYZEN: "Urea-Catatonia". (Communicated by Prof. B. BROUWER), p. 113.

Op 8 Januari is overleden het oudlid onzer afdeeling

S. HOOGEWERFF.

HOOGEWERFF is gedurende 45 jaar lid van de Akademie geweest, vroeger een ijverig bezoeker der vergaderingen werd hij in latere jaren hier slechts zelden meer gezien, zoodat de meesten onzer hem niet of weinig gekend zullen hebben.

De wetenschappelijke arbeid van HOOGEWERFF mag hier wel als bekend ondersteld worden, ik wil slechts herinneren aan zijn werk over de reactie van HOFMAN, aan het feit, dat hij als eerste isochinoline uit steenkoolteer heeft gewonnen en aan zijn groote verdiensten voor de chemische techniek.

De waardeering hiervoor is wel heel duidelijk tot uiting gekomen op zijn 70sten verjaardag, onder andere door de oprichting van het HOOGEWERFF-fonds.

Talrijke zijner leerlingen nemen vooraanstaande plaatsen in de chemische techniek in.

Ook op maatschappelijk gebied heeft HOOGEWERFF zich zeer verdienstelijk gemaakt, hij was van 1885—1907 Hoogleraar te Delft, waar hij de eerste rector magnificus was, nadat hij een belangrijk aandeel gehad had in de reorganisatie van de Polytechnische school tot Technische Hoogeschool.

Op 60-jarigen leeftijd trad HOOGEWERFF als hoogleeraar af, maar bleef steeds voortwerken, vooral als lid van talrijke commissies.

HOOGEWERFF was eereid van de Nederlandsche Chemische Vereeniging en oprichter van het *Receuil des Travaux chimiques des Pays-Bas*.

Wegens zijn voortreffelijk werk en aangename persoonlijkheid zal de nagedachtenis van HOOGEWERFF steeds in eere gehouden worden.

Physiology. — *Die Tonusmuskeln der Aktinie Metridium dianthus. Ihre Eigenschaften werden verglichen mit denjenigen von plastischem Kautschuk.* Von H. J. JORDAN. (Uit het Zoölogisch station der Nederl. Dierkundige Vereeniging te Den Helder.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

Der erregte quergestreifte Muskel eines Säugetieres, den man an der Verkürzung verhindert, befindet sich in einem Zustande, in dem man ihn mit einem gespannten Stück Kautschuk vergleichen kann. Das (vulkanisierte) Kautschukstück ist als Ganzes ein elastischer Körper, der sich zusammenzieht, wenn man ihm dazu die Gelegenheit gibt. Komplizierter ist der Zustand eines solchen Muskels, wenn er sich im Tonus befindet, wenigstens wenn die diesbezüglichen Theorien der Schule SHERRINGTONS richtig sind. Dann sind nur einzelne Fasern gespannt, der Rest ist schlaff, zusammen wirken alle diese Fasern als ein einziger plastischer Körper. Die schlaffen Fasern verfügen über grosse Viskosität, sie umschliessen die gespannten Fasern, dämpfen ihre Kontraktion, sodass eine Mittellage des Ganzen auftritt, das dann scheinbar spannungslos ist. Jede passive Längenveränderung dieses Gebildes verändert zwar den Spannungsgrad der gespannten Fasern, allein alle diese Schwankungen gehen der Beobachtung verloren, da sie durch die Viskosität der ruhenden Fasermassen gedämpft werden ¹⁾.

Diese Plastizität entspricht einem in der Technik der plastischen Stoffe üblichen Modell, welches aus einer gespannten Feder und einem Kolben besteht, der in einem Zylinder in der Richtung der Längsachse der Feder sich bewegen kann, während er an der Wand des Zylinders Reibungswiderstand erfährt. Zylinder und Feder sind nebeneinander angeordnet, die Last zieht an beiden gleichzeitig. Die Feder entspricht der Elastizität, die sich jeglicher Formveränderung mit ihrer reversiblen Kraft widersetzt, während Kolben und Zylinder der Viskosität entsprechen, deren Widerstand irreversibel ist. In diesem Modell sind beide Kräfte parallel geschaltet; es entspricht etwa dem Modell, welches A. V. HILL zur Beschreibung des Zusammenarbeitens von Viskosität und Elastizität im quergestreiften Muskel überhaupt benutzt.

Ein anderes Beispiel von Plastizität ist unvulkanisierter, plastischer Kautschuk. Durch den Vulkanisierungsprozess werden die Mizellen des Latex-Kolloids so fest miteinander verklebt, dass die vulkanisierte Masse zu einem einzigen festen Körper wird, solange man wenigstens der Verklebung nicht zuviel zumutet, d.h. den Kautschuk nicht zu hoch belastet. Durch zu hohe Belastung wird die Elastizitätsgrenze überschritten und

¹⁾ Reflektorische Spannungsänderungen bei Deformationen bleiben unbesprochen.

die Dehnung wird zum Fließprozess: die Teilchen verschieben sich aneinander vorbei ohne dass dabei weitere Spannung entstünde. Plastischer Kautschuk ist dagegen von vornherein flüssig, er besteht aus Mizellen, welche in einem intermizellären Stoff verteilt sind; der intermizelläre Stoff ist vermutlich eine zähe Flüssigkeit.

Wir haben schon seit einer Reihe von Jahren gezeigt, dass die Muskeln, die die Wand hohlorganartiger Leibeshöhlen gewisser Invertebraten bilden, sich in Ruhe wie plastischer, nach Reizung wie elastischer (vulkanisierter) Kautschuk verhalten. In der Ruhe stellen sie daher einen plastischen Körper dar, der aus festen Mizellen und visköser intermizellärer Flüssigkeit besteht; sie sind dann passiv dehnbar, wobei direkt keine Spannung entsteht, sodass die Plastizität hier ohne Innervation einzelner Fasern den für den Tonus nötigen irreversibeln Widerstand bietet. Dieser Zustand wird durch ein Modell beschrieben, bei dem Feder sowie Zylinder und Kolben hintereinander (in Serie) geschaltet sind. Zieht man an der Feder so tritt erst dann plastisches Nachgeben des Kolbens auf, wenn die Spannung der Feder den gleichen Widerstand bietet, wie die Reibung des Kolbens am Zylinder. Jede Änderung des plastischen Widerstandes während solcher Dehnung hat eine entsprechende Änderung der elastischen Spannung der Feder unmittelbar zur Folge.

Heute haben wir über eine Muskelart zu berichten, bei der nach unserer Überzeugung auch im Zustande der Erregung keine vollkommene Verklebung der Mizellen stattfindet; ein solcher Muskel bleibt also auch bei der Kontraktion ein plastischer Körper, wenn auch vielleicht von höherem plastischen Widerstand. Es handelt sich um die Muskeln der Aktinien, wobei hauptsächlich an einem Ringpräparat des Mauerblattes von *Metridium dianthus* gearbeitet wurde (entodermale Ringmuskelschicht), in einzelnen Fällen an den Längsmuskeln der Septa (Retraktoren). Die Ringmuskeln des Mauerblattes haben keine eigentliche Arbeit zu leisten. Ihre Aufgabe ist, den Turgor des Tieres durch plastischen Widerstand zu gewährleisten, plastisch, da der Inhalt des Gastralraumes grossen Schwankungen unterworfen ist. Bei Volumenzunahme geben die Muskeln dem gesteigerten Innendruck plastisch nach, bei Inhaltsverminderung passen sie sich durch tonische Kontraktion dem neuen geringeren Volumen an. Dabei müssen sie diesen Zustand, den sie hergestellt haben, dauernd festzuhalten imstande sein. Die Innervation ist primitiv, doch fordert die genannte Anpassung viel von diesen Muskeln und wir werden zu zeigen haben, dass sie grossenteils durch ihre kolloidchemischen Eigenschaften zu diesen Leistungen imstande sind, für deren Analogon beim Skelettmuskel der Wirbeltiere eine komplizierte Innervation und deren Regulation durch Zentren nötig ist.

1. *Zunahme des plastischen Widerstandes durch die Dehnung; „Schneepflugeffekt“.*

Wenn ein plastischer Muskel stark gedehnt wird, wie das bei der Aktinie unter biologischen Verhältnissen vorkommt, so wird er lang und dünn, sodass der Widerstand abnehmen und zuletzt, bei zunehmender Dehnung, Zerreissung auftreten müsste.

Bei *Helix pomatia* finden wir eine Regulierung durch die Pedalganglien, die bei ausgiebiger Dehnung den Widerstand des Hautmuskelschlauches steigern. Bei den Aktinien fehlt diese zentrale Regulation. Dafür nimmt im Muskel selbst der Widerstand durch die Teilchenverschiebung stark zu. Auf Grund von Modellversuchen auf die in einer besondern Publikation eingegangen werden soll, erklären wir diese Zunahme durch die kolloidalen Eigenschaften des Muskels. Ein Bild möge diese Hypothese verdeutlichen: Ein Schneepflug wird durch den Schnee gezogen. Er erfährt Widerstand am Schnee; dieser häuft sich jedoch ausserdem vor ihm auf und so erhöht der Schneepflug den Widerstand während er ihn überwindet. Gesetzt nun, die Schneeteilchen wären so leicht beweglich, dass sie, aufgehäuft, wieder in eine Gleichgewichtslage abzufließen instande wären, so würde einige Zeit der Ruhe genügen, um den ursprünglichen geringeren Widerstand wiederherzustellen. Dieses Bild benutzend, wollen wir beim passiv gedehnten Muskel von „Schneepflugeffekt“ reden, der nach einer unbelasteten Pause von einer Art von Erschlaffung gefolgt wird, die wir, zum Unterschiede zur echten Muskeler Schlaffung (nach Reizung) „Abfluss“ nennen wollen. Diese Erscheinungen studieren wir dadurch, dass wir ein Ringpräparat eine Zeitlang mit bestimmter Last dehnen, sodann eine gewisse Zeitlang den Muskel dem Einfluss des Gewichtes entziehen, und dann das Gewicht wieder wirken lassen. Wir untersuchen die Zustandsveränderung im Muskel während der Pause vor allem am ersten Teil der auf sie folgenden Dehnungsstrecke; da diese einem Erschlaffungsprozess („Abfluss“) während der Pause entspricht, ist sie sehr steil und soll als „freier Fall“ bezeichnet werden. Auf diesen folgt die typische wenig geneigte plastische Dehnungskurve.

Dass dieser „freie Fall“ keineswegs durch einen kontinuierlichen spontanen Erschlaffungsprozess, der im ruhenden Muskel immerhin stattfinden könnte, verursacht wird, zeigt sich schon dadurch, dass die Fallhöhe nicht abhängig ist von der Dauer der Pause (z.B. 10 und 30 Minuten). Dazu kommt, dass, wenn man vorsichtig dehnt, mit geringer Belastung, dieser „freie Fall“ völlig fehlt, ein Beweis dafür dass die Schnelligkeit, mit der wir die Teilchen des Muskels zwingen sich umzulagern, den Widerstand, den „Schneepflugeffekt“ erzeugt. Dies wird durch folgenden Versuch bestätigt: wir messen die Höhe des „freien Falls“ nach Pause erst bei höherer, dann bei niedriger Last, bei konstanter Pausenlänge von 10 Minuten. Zweimal wurde mit 37 gr. Last gedehnt, je eine Minute lang und nach je einer Pause von 10' eine Fallhöhe, von 18,6 mm und 11,3 mm festgestellt. Daraufhin wurde an Stelle von 37 gr. nur 18,5 gr angehängt: die Fallhöhen betrugen je nach 10' Pause: 0,0 mm, (wobei innerhalb einer Minute keine Dehnung folgte), dann 2 mm, endlich 3 mm,

jeweils gefolgt durch geringfügige Dehnung. Die 18,5 gr würden ohne vorherige Dehnung durch 37 gr vollkommen genügt haben um eine ausgiebige Dehnung zu erzeugen, und sie tun es auch, einige Zeit nach der schnelleren Dehnung, in zunehmendem Masse wieder. Daher hat die Dehnung mit 37 gr den Widerstand stark gesteigert, so dass die 18,5 gr ihn nicht überwinden können, bis der allmähliche „Abfluss“ eine Anpassung an die neue Last herbeiführt, und jene zunehmende Dehnung auftritt, mit neuem „Schneepflugeffekt“ und „Abfluss“.

2. Die Wiederverkürzung nach Totalentlastung. Die Aktinie bei Ebbe und Flut.

Wir erwähnten oben das allgemeine Gesetz, dass ein Körper erst dann durch ein Gewicht plastisch gedehnt werden kann, wenn die elastische Spannung der Teilchen ebensogrossen Widerstand bietet, als die Plastizität. Bei zunehmendem plastischem Widerstand muss daher auch die elastische Spannung zunehmen. Dies äussert sich wie folgt: Wenn einer Aktinie, die an der Wand eines Aquariums fest sitzt, das sie umgebende Wasser entzogen wird, dehnt sie sich mit der Zeit zu ungeheurer Länge (typische plastische Dehnungsreaktion, wie an unserm Apparate). Sobald wir nun nach dieser künstlichen Ebbe künstlich Flut erzeugen, dadurch, dass wir vorsichtig Wasser hinzutreten lassen, zieht das Tier sich beinahe unmittelbar zur ursprünglichen Gestalt zusammen. Wir können diese Erscheinung am Apparate nachmachen. Ein gedehnter Ring zieht sich bei Wegnahme des belastenden Gewichtes so gut wie gar nicht zusammen (Irreversibilität der Plastizität). Wenn wir jedoch jeglichen äusseren Widerstand wegnehmen, auch den Reibungswiderstand des Schreibhebels am Kymographion, dann erfolgt nennenswerte Wiederverkürzung und bei der geringeren Länge bietet der Muskel neuer Belastung neuen Widerstand. Allein dieser Widerstand ist nicht elastisch reversibel, sondern plastisch, irreversibel! Die Spannung der Teilchen war im Gleichgewicht mit dem Verschiebungswiderstand der Teilchen. Daher kann die Spannung auch nur diesen Widerstand überwinden, während jeder Zusatzwiderstand die Wiederverkürzung unmöglich macht. Während der Wiederverkürzung nach Aufhebung jeden äusseren Widerstandes bleibt das typische Wechselspiel zwischen Formveränderung der Mizellen und Verschiebung der Teilchen bestehen. Die gespannten Mizellen können sich nicht zusammenziehen, ohne zugleich den sie umgebenden viskösen Inter-mizellarstoff zusammenzudrücken, und so auch eine plastische Verkürzung des Muskels zuwegezubringen. Bei der darauffolgenden Belastung wird das Gewicht nämlich in der Tat nicht durch die Spannung der Teilchen (denn diese ist ja durch die Verkürzung verschwunden), sondern durch die Viskosität des intermizellären Stoffes getragen: die folgende Dehnung ist plastisch, irreversibel und je steiler, je höher die Temperatur ist. In etwaig gemachten Pausen zeigt sich der „Abfluss“ des Schneepflugeffektes, der Schuld an der elastischen Spannung der Teilchen und somit an

der Wiederverkürzung war. Bedingung zu dieser Wechselwirkung zwischen festen und flüssigen Bestandteilen des Muskels, welche die Funktion dieser Muskeln völlig beherrscht, ist die Tatsache, dass hier stets nebeneinander derartige feste und flüssige Teilchen bestehen bleiben, dass die elastischen Elemente keine einheitlichen Fasern bilden, sondern durch Vermittlung des intermizellären Stoffes ihre Bewegungen auf den Gesamtmuskel übertragen müssen. Wir werden nun zeigen, dass dieses auch für die echte Kontraktion dieser Muskeln gilt.

Die „Zuckung“ und der Tetanus der Aktinienmuskulatur. Man kann die Muskeln einer Aktinie mit Einzelöffnungsschlägen oder mit faradischen Reizen zu Kontraktionen bringen, immer besteht diese aus sehr langsamer Crescente, langem Festhalten der Verkürzung auf der Höhe der Kontraktion und schliesslich äusserst langsamer Decrescente. Die Kontraktionshöhe ist in sehr hohem Masse abhängig von der Last und nimmt mit zunehmender Last schnell ab. Schon bei einer Belastung von 8 gr werden die Ausschläge oft sehr gering. Im Leben des Tieres dürfte ja überhaupt die Kontraktion gegen Last keine grosse Rolle spielen. Die Hauptaufgabe der Muskeln ist festzuhalten, was gehoben wurde.

In der Tat trägt der Muskel auf dem Gipfel dasjenige Gewicht, welches er gehoben hat und wird durch jedes höhere auf dem Gipfel angehängte Gewicht unmittelbar, und zwar irreversibel oder plastisch gedehnt. Wir erklären nach unseren Erfahrungen am ruhenden Muskel diese Erscheinungen wie folgt: Der Muskel bleibt auch während der Verkürzung plastisch, d. h. in den Mizellen entsteht durch den Reiz Spannung und dadurch Verkürzung, die aber (im Gegensatz zum Wirbeltiermuskel) durch Vermittlung plastischen intermizellären Stoffes auf den Gesamtmuskel übertragen werden muss, wie wir das für die Wiederverkürzung des ruhenden, gedehnten Muskels auseinandergesetzt haben.

Nebeneinander finden daher zwei Prozesse statt: die Last dehnt die flüssigen Bestandteile, während die elastischen Bestandteile die Last heben. Beide Prozesse, sowie die Wechselwirkung zwischen Elastizität und Plastizität, bilden eine Resultante, die wir als Verkürzung wahrnehmen. So wird wohl auch erklärt, warum das Gewicht hier einen so grossen Einfluss auf die Zuckungshöhe hat. Wichtiger aber ist die Tatsache, dass die Dehnung während der Kontraktion im plastischen Teile „Schneepflugeffekt“ erzeugt, dessen Wirkung wir nun studieren wollen. Wie bei der Wiederverkürzung nach Dehnung, hat die Spannung der gereizten Teilchen den viskösen Stoff zusammengeschoben. Ein Muskel der bei der Kontraktion durchaus fest wird, erschlafft unmittelbar nach dem Reiz schnell und (beinahe) total (Schnecken, Wirbeltiere). In visköser Flüssigkeit eingebettete Teilchen schieben diese Flüssigkeit zusammen. Auf dem Gipfel der Kurve mögen die Teilchen unmittelbar erschlaffen; doch werden wir das gar nicht wahrnehmen, da das Gewicht nunmehr durch die Plastizität getragen wird. Jegliche wahrnehmbare Decrescente ist

nämlich plastische Dehnung durch ein Gewicht. Während der Kontraktion erzeugt, wie wir zeigen werden, das Gewicht einen bestimmten Widerstand im plastischen Stoff, der dem gehobenen Gewichte entspricht (Schneepflugeffekt, wie in unserem Dehnungsversuch mit variiierter Last am ruhenden Muskel). Daher kann der Muskel auf dem Kontraktionsgipfel gerade dieses Gewicht tragen. Dass es keine nennenswerte Spontanerschaffung gibt zeigt sich durch Versuche, bei denen wir den Muskel auf der Höhe seiner Kontraktion dem Einfluss der Last entziehen und nach variierten Pausen aufs Neue belasten. Spontanerschaffung müsste sich nun durch „freien Fall“ zeigen, dieser tritt nach $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ Stunde nicht auf, nach $\frac{3}{4}$ Stunden in geringem Masse.

Paradoxon der Decrescente. Ein total unbelasteter Muskel wird faradisch gereizt. Auf dem Gipfel seiner Kontraktion wird er mit 25,9 gr belastet; die „Decrescente“ fängt unmittelbar an und läuft kontinuierlich durch bis zur Abszisse und weiter. In einem zweiten Falle wird der Muskel auf dem Gipfel der Kontraktion mit 25,9 plus 37 gr belastet: die „Decrescente“ ist steil. Auf etwa halber Höhe zur Abszisse nehmen wir die 37 gr weg und lassen nur die 25,9 gr, sodass nunmehr der Muskel in beiden Fällen mit gleicher Last von 25,9 gr gedehnt wird. Im ursprünglich mehr gedehnten Muskel ist durch den Schneepflugeffekt soviel Widerstand entstanden, dass er trotz seines Vorsprunges vom anderen überholt wird, beide Kurven einander schneiden: der Vorsprung wird zum Nachteil im Wettrennen nach der Abszisse („Paradoxon der Decrescente“). Die Decrescente ist also in der Tat plastische, passive Dehnung!

Paradoxon der Crescente. Zwei Kurven gleichen Ringmuskels werden übereinander aufgenommen, in einem Falle war der Muskel bei der Faradisation mit 3 gr, im anderen mit 8 gr belastet. Die Hubhöhe im ersteren Versuch ist grösser als diejenige im letzteren. Auf dem Gipfel der Kontraktion wird der Muskel im Falle der ursprünglich niederen Belastung mit weiteren 5 gr belastet, sodass von nun an in beiden Versuchen die Last gleich ist (8 gr). Doch sinkt im Versuch, bei dem während der Crescente die Belastung 3 gr betrug, die Decrescente dauernd steiler ab, als beim andern Versuch, sodass beide Kurven auch hier einander schneiden. Auch hier wird die Abszisse am schnellsten durch denjenigen Muskel erreicht, der sich am weitesten von ihr entfernt hatte. Die geringere Last während der Kontraktion hatte geringeren Widerstand erzeugt. Damit ist bewiesen, dass auch während der Kontraktion, durch Last „Schneepflugeffekt“ entsteht. So sind wir imstande durch Vergleichung des Aktinienmuskels mit dem Modell des plastischen Kautschuks die biologisch wichtigen Eigenschaften des Muskels dem Verständnis näher zu bringen, wobei wir alles von dem Umstand ableiten, dass diese Muskeln unter allen Umständen plastisch bleiben.

Geophysics. — *Gravity and the Hypothesis of Convection-Currents in the Earth.* By F. A. VENING MEINESZ.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

In the course of the last years, ESCHER has published a theory on the relation of the volcanic activity in the Netherlands East Indies and the belt of negative gravity anomalies in that area, and he bases his investigation on the hypothesis of ARTHUR HOLMES of convection-currents in the Earth. This has lead the writer to take up the study of the convection-hypothesis and the following considerations have been the consequence. They have given him the conviction that such currents are highly probable, although their distribution seems to him to be somewhat different from what HOLMES and ESCHER have suggested.

The writer wishes first to point to an important result of the gravity research at sea that as yet has not found a satisfactory explanation. This is the fact that in several regions extensive fields of positive anomalies have been found. For estimating this fact on its true value, it must be mentioned that the anomalies have been obtained by comparing the gravity results to the formula of normal gravity that has been principally derived from the gravity-results on the continents. This result appears to suggest a systematic difference of the gravity between the oceanic and the continental parts of the Earth's surface.

The positive fields may perhaps be separated in two kinds, a purely oceanic kind and another that occurs in tectonic basins. Of the first, instances have been found in the eastern and middle parth of the North Atlantic Ocean and in the middle and western part of the Pacific Ocean; the second has been met with in all the deep basins in tectonically active areas, that have been investigated, i.e. in the Gulf of Mexico, in the sea west of Cuba, in the Caribbean, in the Celebes Sea, in the north-western and south-eastern portion of the Banda Sea and probably also in most of the Mediterranean basins. For the last kind, there seems to be an unmistakable relation between the depth of the basins and the intensity of the anomalies. This is clearly proved in the Netherlands East Indies, where the deepest basins are at the same time the areas where the anomalies are most positive.

It is important to notice that this relation with the positive anomalies does not exist for the trough-like basins, which are to be excepted from these considerations. Probably the troughs are connected with a crustal folding or buckling process, while the basins that are meant here, have another character; there are many indications of their being caused by

vertical movements of the crust, i.e. of their having subsided in comparatively recent times.

The occurrence of these fields of positive anomalies is difficult to explain. There can be no question of an effect of the system of isostatic reduction that has been applied to the gravity results, because we can easily prove that these reductions don't appreciably change the mean anomaly over extensive fields. The truth of this statement is demonstrated by the fact that the fields of anomalies don't disappear by changing over to other systems of isostatic reduction.

It is neither possible to explain them by the presence of heavy masses in the crust under maintenance of the isostatic equilibrium, as a few writers have been inclined to do. There is no getting away from the fact that they mean real departures of equilibrium. The question is how to explain this.

It appears difficult to the writer to do it by assuming an increase of density in the crust or in the substratum, although such changes would certainly be conceivable as a consequence of changes of state or of magmatic differentiations, but the resulting deviation of equilibrium would necessarily tend to disappear by the reestablishment of isostatic balance. This readjustment seems to work rather quickly; in the deltas of the Mississippi and the Nile, gravity has been found to be about normal, although heavy loads of material are being deposited on the crust. So the crustal sinking for the readjustment of equilibrium seems to keep up with the loading without any appreciable lag. In the case of the areas that have been loaded by ice in the glacial periods, as Scandinavia and Labrador, the readjusting of equilibrium after the disappearance of the ice, has likewise been going on fairly rapidly; although the time-interval is short, geologically speaking, the size of the negative anomalies shows that the major part of the rising must already have taken place. So, here also, the time-lag, reckoned with a geological time-scale, is small. The conclusion is, that if we wish to explain the fields of positive gravity anomalies by increases of density in the crust or in the substratum, we have to assume great changes taking place so quickly that the lag of readjustment of equilibrium is sufficient to account for the anomalies. Such phenomena, occurring over extensive areas, appear unlikely and the writer feels that it would be a remarkable accident if the phenomenon would exactly take place in our own geological period over all the areas where positive fields have been found.

Besides the way of explaining these fields of positive anomalies as lag-phenomena in a dynamic process, there is also a possibility of an explanation as a stable phenomenon. This explanation assumes horizontal compression in the Earth's crust. The curvature of the Earth would bring about a vertical resultant of the compression that pushes the crust in a position higher than that which would correspond to isostatic equilibrium, and this would cause a positive gravity anomaly. In a previous paper,

the writer has deduced the amount of compression that is necessary. For compression in one direction it is $d = 15000 A/T \text{ Kg/cm}^2$, in which A is the anomaly in milligal and T the thickness of the crust in Km, and for compression in all directions, it is half as much.

This formula presents at once a serious difficulty adherent to this explanation; it suggests considerable stresses in the crust, because, even in the most favourable case of all-sided compression, an anomaly of 40 milligal would already correspond to a stress of 10000 Kg/cm^2 . It must be considered doubtful whether such stresses are possible.

Another difficulty with regard to this explanation is the fact that, in most cases, the fields of positive anomalies are not gradually disappearing on the border of the area, but rather suddenly and it seems difficult to imagine how this can be the case for great compressional stress.

Notwithstanding these difficulties, the writer was hitherto in favour of this last explanation, because he did not see another way for explaining the fields of anomalies as a stable phenomenon. Investigating the hypothesis of convection-currents in the Earth, it occurred to him, however, that this hypothesis could likewise provide such an explanation, not by means of a static equilibrium but by means of stationary dynamic processes in the substratum. We shall now consider this hypothesis more in detail.

In the opinion of the writer, there is every reason to admit the possibility of convection-currents in the Earth. In the beginning of the Earth's history, these currents must doubtless have existed in the liquid Earth as a consequence of the instability brought about by the cooling from the outside. The distribution of the ascending and descending currents must then have been more or less accidental. In the actual stage of the Earth, the character of the currents must have changed. For reasons of radio-activity that we shall examine presently, it is most probable that the substratum under the continents is warmer than under the oceans and so there is actually a stable difference of temperature, that cannot fail to engender convection-currents of a stable character. According to this view the currents must in general rise under the continents and sink down under the oceans.

This consideration meets, in the opinion of the writer, a difficulty that JEFFREYS has brought forward with regard to the hypothesis of convection-currents. Although JEFFREYS does not believe them to be impossible, he thinks that they are so improbable that they could be called a freak; he bases his view on the close limits between which the vertical temperature gradient of the substratum has to lie for rendering them possible. If this gradient is too high, we should get irregular motions of small extent like those that occur in a boiling kettle, if it is too low, there would be no convection at all. These limits, however, are based on a substratum of equal temperatures in horizontal layers; in this case the

situation remains stable as long as the vertical temperature gradient does not exceed a value that is connected with the viscosity of the material. If, however, the temperature is different in a horizontal sense, there is no stability at all possible when the strength-limit of the substratum is zero, and so there is no lower limit for the vertical temperature gradient below which no convection could occur. The higher limit becomes likewise illusory, because even for high vertical gradients, the distribution of the rising and descending currents would not become irregular, but they would still be governed by the distribution of the temperatures in horizontal sense.

The gist of the matter lies in the question whether it can be true that the temperatures of the substratum are different below the continents and below the oceans. A first reason for this assumption is the fact that in the ocean, the temperature at a depth of say five kilometers is four degrees, while it is considerably higher at the same depth in the continents. A second reason is found in the differences of the radio-activity between both parts of the crust. JEFFREYS gives the following figures for the mean radio-activity of different materials; according to him, the heat generation in 10^{-12} calorie per second per cubic centimeter is for granite 1.3, for basalt 0.50, and for plateau basalt 0.36. Now there cannot be any doubt about the fact that the layer of granite is considerably thicker in the continents than in the oceans, where it may even be entirely absent and where the surface layer in that case would probably be basaltic. So the generation of heat in the surface layer of the crust is doubtless larger in the continents than in the oceans.

It is difficult to say what the radio-activity is in the deeper layers, because there is no common opinion about their constitution, but it appears unlikely that there would be a reversion of the heat generation in such a way that the above effect would be compensated. For getting a better view on this question, we should also require some idea about the way in which the astonishing concentration of the radio-activity of the Earth in the outer layers has taken place. The view may be suggested that this might have occurred by the carrying upward of the radio-active constituents by the convection-currents and this would lead to the following suggestion, which the writer wishes only to offer as a tentative speculation. The affinity of these constituents to granite appears to be greater than to the heavier materials of the crust and so the lighter granites, being systematically carried upward, would carry along these radio-active constituents, and the increasing radio-activity in these parts would enlarge the temperature differences and stabilize the originally accidental distribution of the rising currents. Such a process would explain the formation of granitic continents with their greater radio-activity.

Admitting that the temperatures in the substratum under the continents are higher than under the oceans, it seems inevitable that convection-currents will develop. The mechanism is the following. Comparing a

column of the substratum below the continents to one of the same weight below the oceans, the first must have a higher temperature than the second and so it must have less density and greater height. Assuming that originally both columns were in hydrostatic equilibrium at their base, there would be no equilibrium at the top, as is demonstrated by the fact that the first column is higher than the second and there would be a flow of material in the upper part from the first column towards the second. There can be no doubt that such a flow is possible in the substratum, because it is proved to occur when the isostatic balance of the crust is readjusted after other disturbances of equilibrium. The loading of the second column must bring about an increase of pressure at the foot of this column and so, in the lower part, a contrary current must set in from the second column to the first. The process will attain a dynamic equilibrium when this lower current exactly compensates the upper one; a stationery convection-current has then be set going.

The height of the columns is determined by the fact that the current can only originate in a layer that, under the same conditions of temperature and pressure, has homogeneous density. The layer will, therefore, reach down to the first discontinuity surface in the substratum below the crust. We shall presently assume a depth of 1200 Km for this surface, corresponding to indications given by seismology. If no homogeneous layer would exist below the crust, i.e. if the density would gradually increase downwards, no convection would be possible, but the writer does not think that this is likely, because all the indications of Geochemistry and Seismology point to a separation of the materials in the Earth in more or less homogeneous layers.

Below the convection-layer we have to assume a layer of greater density, to which we may probably attribute at least the same plasticity as to the convection-layer itself. Under these circumstances, the loading of the second column and the unloading of the first must bring about vertical movements of both columns till the hydrostatic equilibrium with regard to the lower layer has been readjusted. A simple consideration shows, that this readjustment of balance does not destroy the differences of pressure between the two columns, although it reduces them, and so the mechanism of the convection remains as it has been explained above.

Let us now examine the effect of the whole phenomenon on gravity. Superficially looking, it might appear as if we ought to find about normal gravity, because we assumed the probability of a readjustment of the equilibrium of the whole convection-layer on its supporting layer, and it might be thought that this would imply isostasy, provided the equality of mass is reckoned over a depth well down in the lower layer. This conclusion, however, is wrong because of the dynamic character of the phenomenon and so we have to make a deeper investigation which has to be founded on the theory of viscous fluids. In doing this we can apply a simple rule that is valid for the following cases:

a. The movements, the pressure and the temperature are stationary and the velocities v and their derivatives are small enough that terms containing their second power may be neglected.

b. The viscosity k is large and the velocities v are so small that even terms containing the velocity or its derivatives in the first power, may be neglected unless they are multiplied by the viscosity. The pressure and the temperature are assumed to be stationary or slowly variable.

In both cases the assumptions lead to putting $\nabla v = 0$.

The second case is represented by the conditions of the substratum and so the rule may be applied to all problems relating to it, i.e. to stationary processes, as we have in convection-currents, or to temporary processes like readjustments of isostatic equilibrium.

In both cases we may state the following principle, comparable to the principle of d'Alembert for ordinary dynamic problems.

A problem can be treated as a static problem by adding everywhere a force $k \nabla^2 v$ per unit of volume.

Here ∇^2 stands for $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ and $\nabla^2 v$ has the components $\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z$. If p is the pressure and X, Y, Z the components of eventual other forces working per unit of volume, the principle can be written

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= X + k \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= Y + k \nabla^2 v_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= Z + k \nabla^2 v_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Choosing the y coordinate vertically downwards, the second formula gives the downward vertical component of the additional force and so the vertical component of the resultant force working on a vertical column of unit horizontal cross-section, reaching down through the whole convection-layer, is the integral of $k \nabla^2 v_y$ over the thickness H of this layer. This must correspond to a defect of mass in the column of the same weight, which must give rise to isostatic anomalies at the Earth's surface. Assuming, for simplifying, that the field is constant in a horizontal sense over an extensive area, the anomaly would be

$$A = -2\pi K^2 \frac{k}{g} \int_0^H \nabla^2 v_y dy \quad (K^2 = \text{Newtonian Gravitation Constant})$$

So we find that the anomalies are connected with vertical movements in the substratum and not directly with horizontal ones. The fields of

anomalies that have been treated in this paper, thus point to vertical movements and so these fields provide a confirmation of the hypothesis of convection-currents. A nearer investigation strengthens this confirmation.

For this object, we shall make a supposition regarding the distribution of v_y in the descending and ascending currents. For simplification, we shall assume that the phenomenon does not depend on the coordinate z , i.e. that it is two-dimensional. Remarking that v_y must disappear at the upper and lower boundary of the convection-layer, i.e. for $y = \pm \frac{1}{2}H$ and likewise at the borders of the column, i.e. for $x = \pm \frac{1}{2}D$, D being the diameter of the column, we shall put for the descending column

$$v_y = v_m \left(1 - \frac{4x^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{4y^2}{H^2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

and we find

$$\nabla^2 v_y = -\frac{8v_m}{D^2 H^2} (D^2 + H^2 - 4x^2 - 4y^2) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

which, according to the above formula, leads to a mean anomaly

$$A = \frac{32}{3} \pi K^2 \frac{k(D^2 + H^2)}{g D^2 H} v_m \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

It is important to notice that the anomaly is positive above descending columns and negative above rising ones¹⁾. This conclusion does not change when the distribution of v_y is more complicated, as is surely the case in the Earth. So we see that the results of our investigation agrees with the actual facts; over the oceans, where we may expect the descending currents, fields of positive anomalies are found. This fact, that took us so much trouble to explain otherwise, is fully made clear by the supposition of convection-currents and this appears to the writer to be a strong support of the hypothesis.

The consequence of our result is, that gravity will give a valuable hold on the problem to determine the distribution of the rising and descending currents over the Earth's surface. The writer cannot go further into this subject here, but he wishes to draw attention to the remarkable confirmation provided by the facts regarding the deep basins in tectonic areas, as they have been mentioned in the beginning of this paper. Here we have

¹⁾ This can be derived at once in a more general way by means of vector-analysis. A field of positive anomalies implies a field of negative values of $\nabla^2 v_y$ and so, on the average, the gradient of v_y over the boundary of the field, the upper and lower surfaces of the layer also included, is directed inward. This means greater values of v_y inside the field than outside, i.e. greater downward speed. The reverse is true for negative anomalies.

strong positive anomalies, accompanied by indubitable evidence of recent subsidence. The writer should be inclined to think that in these areas secondary downward convection-currents have developed because of temperature disturbances brought about by the tectonic processes, by changes of the distribution of water and land, by sedimentation and erosion or other agencies. According to what has been said, these currents must cause a combination of a subsidence of the crust and positive anomalies, which corresponds to the facts.

Formula (4) provides the means to compute the maximum speed v_m in the descending current, but the result is uncertain because of the lack of good knowledge about the viscosity k and the depth H of the convection-layer. Substituting for D and H values of 1200 Km and for k a value of 3×10^{22} dyne/sec, which the writer deduced by a rough estimate from the rate of readjustment of the isostatic equilibrium in Scandinavia ¹⁾, we obtain, for an anomaly of 40 milligal, a value of v_m of one centimeter per year. This is only a rough estimate of the order of magnitude and so it does not matter that a more complicated distribution of v_y in the descending current will give some change in the formula.

For two reasons convection-currents in the substratum must cause tangential stresses in the crust. First, the horizontal part of the current must exert a viscous drag on the crust and secondly there must be a tendency of the substratum to slide down from the elevations of the substratum below the continents towards the depressions under the oceans. By a rough approximation that he will publish elsewhere, the writer has found values of $1000 h$ Kg/cm² for the first part of the stress and $300 h$ Kg/cm² for the second part, in which h means the difference in height in Km between the elevation over the rising current and the depression over the descending one. These figures, uncertain as they are, indicate that considerable stresses are likely to occur by this cause and so it appears possible that the convection phenomenon can be responsible for important tectonic disturbances. For the descending currents in the oceans, it appears difficult to give an estimate of h , but for the basins in tectonic areas, there seems reasons to introduce the full depth of these basins, i.e. several Km.

The probability of these considerable tangential forces working on the crust makes it also likely that the convection-currents will bring about shifts of the whole crust with regard to the core of the Earth. This would imply movements of the poles with regard to the crust. So these movements, which many geologists have wanted to admit for explaining climatic

¹⁾ This value of k is not only uncertain because of the way of deduction, but also because we don't know whether the mean anomaly of -40 milligal of this area and its rate of rising of 1 cm per year, which have provided the base for the deduction, are indeed connected with a process of readjustment of isostatic equilibrium. From the gravity data in river deltas, a smaller value of k and a corresponding greater speed of convection would follow, but this base seems to be still more uncertain.

changes, that otherwise appear inexplicable, are by no means impossible in the light of the convection-hypothesis.

A last result, which has been found by a roughly approximate deduction, may be mentioned here. It was found that the difference of temperature of the substratum below the continents and below the oceanic crust, necessary for bringing about a difference of elevation of h Km. is about $25 h^\circ$. This figure does not appear excessive, when we realize that, according to the computations of HOLMES, the absolute temperature at a depth of 30 Km amounts to about 800° .

These last considerations, and the figures that have been given, are problematical and the writer should not wish to attach too much importance to them. Eventual doubts, however, don't affect our principal conclusions, the probability of convection-currents and the explanation that thus can be given of the extensive fields of positive anomalies at sea, that otherwise are difficult to account for.

Physics. — *Determination of capillarity constant by means of two spherical segments*, By J. VERSLUYS.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

In 1916 the author derived a formula expressing the tensile strength of moist sand¹⁾. This formula was based on the force required to break the small body of water (such a body was called a "pendular body") retained by capillarity between two spheres of the same diameter. It was then suggested that the capillarity constant of the liquid could be computed by measuring such force required to pull apart two segments of a sphere, which were held together by such a pendular body of a certain liquid. This suggestion was published in the Dutch language and received little outside attention. In 1927 however, the author had an apparatus constructed having segments with a radius of curvature of about 30 cm; an experiment performed with it by A. M. I. HOOGENDAM in the Laboratory of the BATAAFSCHE PETROLEUM MAATSCHAPPIJ in Amsterdam proved that the formula was satisfactory.

If R denotes the radius of curvature, σ the capillarity constant and γ the angle as shown in the figure, then the formula derived²⁾ for the force required to break the pendular body is

$$P = \pi R \sigma f(\gamma)$$

where

$$f(\gamma) = 2 \sin \gamma - \sin \gamma \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \operatorname{tg} \gamma.$$

¹⁾ „De capillaire werkingen in den bodem", Amsterdam 1916.

²⁾ The reader is referred to op. cit., p. 78—83.

With a close approximation this formula can be written as

$$f(\gamma) = 2 \sin \gamma - 2 \sin \gamma + 2 - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \sin \gamma = 2 - \frac{\pi}{2} \sin \gamma$$

if γ is small.

If r is the radius of the pendular body, one can write

$$f(\gamma) = 2 - \frac{1}{2} \pi \frac{r}{R}.$$

If the radius of the spheres is made 30 cm then the values of $f(\gamma)$ for various values of τ are:

r	$f(\gamma)$
0 cm	2.00000
0.1 „	2.00524
0.5 „	2.02616
1 „	2.05236

It is easy to make the radius r of the pendular body smaller than 0.5 cm, but even when it has this value, neglecting r causes a difference of only

$$\frac{2.02616 - 2.0000}{2} \times 100 = 1.3\%.$$

If water is used at a temperature of 17° centigrade, then the force becomes

$$P = 30 \pi f(\gamma) \times 0.07434 = 7.02 f(\gamma) \text{ grammes.}$$

So for various values of the radius r the force becomes

r	P
0 cm	14.013 grammes
0.1 „	14.049 „
0.5 „	14.199 „
1 „	14.379 „

An advantage of the method given above is that the force to be measured is relatively large so that the errors become small.

Moreover the apparatus may be used to determine the interfacial tensions of two liquids, one of which wets the surfaces better than the other. By using segments of various materials, such as glass, quartz or some metal, the detection of apparent discrepancies may lead to a closer investigation into the phenomenon of wetting of different surfaces by different liquids.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

§ 1. Eine Fläche n^{en} Grades, mit $(n-1)$ fachen Punkte O (Monoid M^n) wird durch Zentralprojektion, aus dem Zentrum O , auf eine Ebene ε abgebildet. Ein Ebenenbüschel, dessen Achse e in ε liegt, bestimmt auf dem Monoid M^n ein System von ebenen Kurven k^n , welches in ein Büschel ebener Kurven c^n abgebildet wird. Zu dessen Basispunkten gehören die n Schnittpunkte von M^n mit e . Jeder der übrigen $n(n-1)$ Basispunkte bildet offenbar sämtliche Punkte einer Geraden a ab, welche durch O geht und dem Monoid ganz angehört. Das Büschel (c^n) enthält eine zusammengesetzte c^n , welche aus der Geraden e und einer Kurve c^{n-1} besteht; letztere ist das Bild des Punktes O und ersichtlich die Schnittkurve von ε mit der Kegelfläche, welche durch die Tangenten von O gebildet wird; sie enthält die Bilder A_k der $n(n-1)$ nach O zielenden Geraden a_k .

§ 2. Ein Monoid enthält im allgemeinen keine Geraden ausserhalb O . Bekanntlich muss das kubische Monoid ausgenommen werden; es enthält ausser den 6 Geraden a noch 15 weitere Geraden, welche je zwei Geraden a treffen und zu je drei eine dreifache Tangentialebene bilden; sie werden abgebildet auf die 15 Geraden $A_k A_l$. Ist O biplanarer Punkt des M^3 , so sind A_1, A_2, A_3 Punkte einer Geraden und gilt dies auch für A_4, A_5, A_6 . Jede der 6 Geraden a vertritt alsdann eine jener 15 Geraden; die übrigen 9 bilden 6 auf M^3 belegene Dreiseite.

§ 3. Soll ein Monoid M^4 eine Gerade enthalten, welche O nicht enthält, so müssen 3 Geraden a in einer Ebene liegen; es muss somit in ε eine Gerade geben, auf welcher 3 Punkte A liegen.

Wenn die 12 Punkte A zu je 3 mit vier Geraden l inzident sind, so enthält M^4 vier Geraden f welche ersichtlich ein *vollständiges Vierseit* bilden.

§ 4. Um zu einem M^4 zu gelangen, welches *zwei Vierseite* enthält, wähle ich in ε zwei Gruppen von je 4 Geraden, bez. l_k und m_k von deren 16 Schnittpunkten lm 4 einer Geraden g angehören. Die übrigen 12 liegen alsdann in einer kubischen Kurve α^3 , welche aus einem beliebig gewählten Punkte O durch einen kubischen Kegel projiziert wird. Durch jene 12 Punkte A lege ich noch eine Kurve α^4 , welche als Leitkurve eines Kegels 4^{en} Grades, mit Spitze O , benutzt wird. Werden diese Kegelflächen durch die Gleichungen $h_3=0$ und $h_4=0$ dargestellt, so entspricht der Gleichung $h_4 + \lambda h_3 = 0$ ein Monoid, welches ausser den 12 Geraden a offenbar 8 Geraden f enthält; diese bilden aber *zwei Vierseite*.

§ 5. Es soll nun gezeigt werden, wie man zu einem Monoid M^4 mit *drei Vierseiten* gelangen kann. In meiner Arbeit „Über gewisse der allgemeinen cubischen Curve eingeschriebene Configurationen“ (Wiener Sitzungsberichte XCVIII, S. 453) habe ich bewiesen, dass man einer Kurve α^3 Konfigurationen 12_3 einbeschreiben kann, welche dem Schema

$A_1 B_1 C_2$	$A_1 B_2 C_1$	$A_2 B_1 C_1$
$A_2 B_2 C_3$	$A_2 B_3 C_2$	$A_3 B_2 C_2$
$A_3 B_3 C_4$	$A_3 B_4 C_3$	$A_4 B_3 C_3$
$A_4 B_4 C_1$	$A_4 B_1 C_4$	$A_1 B_4 C_4$

entsprechen, wo die 12 Geraden ABC ersichtlich drei Gruppen zu je 4 Geraden bilden und jede Gruppe sämtliche 12 Punkte enthält. Ebenso wie in § 4 erhält man nun ein M^4 , welches ausser den Geraden a noch zwölf Geraden f enthält; diese bilden nun, jenen 3 Gruppen entsprechend, *drei Vierseite*.

§ 6. In meiner oben erwähnten Arbeit finden sich (S. 463) Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ mit dem Schema

$A_1 A_4 A_6$	$A_2 A_5 A_7$	$A_3 A_6 A_8$	$A_4 A_7 A_9$	$A_1 A_5 A_9$
$A_5 A_8 A_{10}$	$A_6 A_9 A_{11}$	$A_7 A_{10} A_{12}$	$A_8 A_{11} A_1$	$A_2 A_6 A_{10}$
$A_9 A_{12} A_2$	$A_{10} A_1 A_3$	$A_{11} A_2 A_4$	$A_{12} A_3 A_5$	$A_3 A_7 A_{11}$
$A_3 A_7 A_{11}$	$A_4 A_8 A_{12}$	$A_5 A_9 A_1$	$A_6 A_{10} A_2$	$A_4 A_8 A_{12}$

aus welchem sich ergibt, dass die 16 Geraden der Kfg. 5 Gruppen zu je 4 Geraden bilden, indem wiederum jede Gruppe sämtliche 12 Punkte enthält. Jede der 16 Geraden ist das Bild einer Gerade f .

Es gibt demnach Monoide M^4 , welche *fünf Vierseite* enthalten. Der fünften Vierergruppe entspricht ein Vierseit, welches mit jedem der anderen Vierseite eine Gerade gemein hat.

§ 7. Die 12 Ähnlichkeitspunkte von 4 Kreisen bestimmen bekanntlich eine Kfg. $(12_4, 16_3)$, welcher eine kubische Kurve α^3 umbeschrieben werden kann¹⁾. Sie ist identisch mit der Kfg. von HESSE, und entspricht dem Schema

$A_1 B_1 C_1$	$A_2 B_3 C_4$	$A_3 B_4 C_2$	$A_4 B_2 C_3$
$A_2 B_4 C_3$	$A_1 B_2 C_2$	$A_4 B_1 C_4$	$A_3 B_3 C_1$
$A_3 B_2 C_4$	$A_4 B_4 C_1$	$A_1 B_3 C_3$	$A_2 B_1 C_2$
$A_4 B_3 C_2$	$A_3 B_1 C_3$	$A_2 B_2 C_1$	$A_1 B_4 C_4$

Hier erscheinen in jeder der vier Spalten vier „getrennte“ Geraden, d.h. Geraden welche zusammen die 12 Punkte der Kfg. enthalten. Aber auch jede der vier Zeilen dieses Schemas zeigt eine Gruppe von vier getrennten Geraden. Den 8 Gruppen entsprechend gibt es demnach Monoide M^4 mit *acht Vierseiten*.

¹⁾ Eigenschaften dieser Kfg. finden sich in meiner Arbeit „Über gewisse ebene Configurationen“ (Acta Math. XII, S. 63—81).

Die Punkte A_k sind cotangential, d.h. ihre Tangenten treffen sich in einem Punkte A der Kurve α^3 . Analog haben die Punkte B_k einen gemeinschaftlichen „Tangentialpunkt“ B und die Punkte C_k einen analogen Punkt C ; die Punkte A, B, C liegen ersichtlich in einer Geraden. Ersetzt man sie durch Wendepunkte, dann fallen A_1, B_1 und C_1 bez. mit A, B, C zusammen, indes $A_2, A_3, A_4; B_2, B_3, B_4; C_2, C_3, C_4$ drei lineare Tripel bilden. Man erhält alsdann ein Monoid M^4 mit 19 nicht nach O zielenden Geraden.

§ 8. Durch die Schnittpunkte einer Kurve α^n , der Ebene ε , mit einer Gerade g lege ich die n Geraden h_k . Diese bilden eine ausgeartete Kurve β^n ; dem durch α^n und β^n bestimmten Kurvenbüschel gehört die Figur an, welche aus g und einer durch $n(n-1)$ Punkte A_k von α^n bestimmten Kurve α^{n-1} besteht. Bei beliebiger Annahme des Punktes O erhält man nun, der Lage der A_k entsprechend, ein Monoid M^n welches ein *vollständiges* $(n-1)$ Seite trägt.

Legt man durch jeden Schnittpunkt G_k von α^n und g zwei Geraden, h_k und l_k , so ergibt sich ein Kurvenbüschel dem α^n und die beiden aus den Geraden h bez. l gebildeten ausgearteten Kurven β^n und γ^n angehören; auch die Figur welche aus g und einer α^{n-1} besteht, gehört diesem Büschel an. Die Spurkurven α^n und α^{n-1} bestimmen nun mit irgend einem Punkte O ein Monoid M^n , welches *zwei* $(n-1)$ Seite enthält.

§ 9. Wenn O auf einer Doppelgerade d eines M^n liegt, so gibt es $n(n-1)-4$ Geraden a . In der Spur D von d haben nämlich die Bildkurven c^n (§ 1) alle einen Doppelpunkt, wonach D an die Stelle von 4 Spurpunkten A tritt.

Ein Monoid M^4 mit Doppelgerade d enthält somit 8 Geraden a und ausserdem 8 weitere nicht nach O zielende Geraden f , die bez. in den 8 Ebenen ad liegen.

Enthält M^4 zwei Doppelgeraden d und d' und demnach 4 Geraden a , so liegen in den Ebenen da und $d'a$ je 4 Geraden f bez. f' . Jede Gerade f trifft ersichtlich 3 Geraden f' .

Ein Monoid M^4 mit 3 Doppelgeraden enthält keine weitere Geraden (Fläche von STEINER).

§ 10. Ein Monoid M^5 kann höchstens 4 Doppelgeraden haben. Wären deren 5, so müsste der Tangentenkegel von O ausarten in eine quadratische Kegelfläche und zwei Ebenen; jede dieser Ebenen hätte dann einen Schnitt 6en Gerades mit M^5 .

Gibt es 4 Geraden d , so besteht die Spurkurve α^4 aus 2 Kegelschnitten, welche je 2 Punkte A tragen. Die 6 Ebenen durch je 2 Geraden d enthalten jede eine auf M^5 liegende Gerade f .

Ein M^5 kann eine dreifache Gerade t enthalten; da diese 9 Geraden a ersetzt, gibt es alsdann nur 11 Geraden a . Jede der 9 Ebenen at enthält eine auf M^5 liegende Gerade f .

Ausser t könnte M^5 eine Doppelgerade d haben. Die Spurkurve a^4 ist dann ausgeartet in eine nodale a^3 , mit Doppelpunkt in der Spur T von t , und die Gerade TD . Es gibt alsdann 7 Geraden a und 7 Geraden f .

Mathematics. — *Die Invarianten bezüglich einer einzelnen linearen Transformation in n Veränderlichen.* Von R. WEITZENBÖCK.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

Ich beweise im Folgenden, dass die ganzen rationalen Invarianten von n unabhängigen Veränderlichen gegenüber einer einzelnen, nicht-singulären, linearen und homogenen Transformation einen endlichen Integritätsbereich bilden und dass ihre Ermittlung auf die Berechnung von Semi-Invarianten binärer Formen zurückgeführt werden kann.

§ 1. Allgemeines,

Gegeben sei in n homogenen Veränderlichen X_i eine lineare homogene Transformation

$$X_i = a_i^k X_k, \quad \dots \quad (1)$$

deren n Koeffizienten a_i^k Elemente eines beliebigen kommutativen Körpers seien. Wir denken uns die nicht-singuläre Matrix $a = \|a_i^k\|$ durch Einführung neuer Veränderlicher $x_i = s_i^k X_k$ auf die JORDAN'sche Normalform

$$A = S^{-1} a S = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha 1 & & & & & & & & \\ & \alpha 1 & & & & & & & \\ & & \alpha & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \alpha & & & \\ \hline & & & & & & \beta 1 & & \\ & & & & & & & \beta 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \beta \\ \hline & & & & & & & & & \gamma 1 & \dots \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \mu + 1 \\ \nu + 1 \end{array} \right\}$$

transformiert und gebrauchen dann für $x_1, x_2, \dots, x_{\mu+1}$ den Buchstaben x , für $x_{\mu+2}, x_{\mu+3}, \dots, x_{\mu+\nu+2}$ den Buchstaben y , u.s.f. An Stelle von (1) haben wir dann

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 = \alpha x_1 + x_2 \\ \bar{x}_2 = \alpha x_2 + x_3 \\ \dots \\ \bar{x}_{\mu+1} = \alpha x_{\mu+1} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_1 = \beta y_1 + y_2 \\ \bar{y}_2 = \beta y_2 + y_3 \\ \dots \\ \bar{y}_{\nu+1} = \beta y_{\nu+1} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{u.s.w.} \quad (2)$$

Wir verwenden statt der homogenen Koordinaten x_i, y_i, \dots auch inhomogene:

$$\xi_i = \frac{x_i}{x_{\mu+1}}, \eta_i = \frac{y_i}{y_{\nu+1}}, \dots \quad (3)$$

Aus (2) wird dann:

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi}_1 = \xi_1 + \frac{1}{\alpha} \xi_2 \\ \bar{\xi}_2 = \xi_2 + \frac{1}{\alpha} \xi_3 \\ \dots \\ \bar{\xi}_\mu = \xi_\mu + \frac{1}{\alpha} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta}_1 = \eta_1 + \frac{1}{\beta} \eta_2 \\ \bar{\eta}_2 = \eta_2 + \frac{1}{\beta} \eta_3 \\ \dots \\ \bar{\eta}_\nu = \eta_\nu + \frac{1}{\beta} \end{array} \right\} \text{u.s.w.} \quad (4)$$

Wir werden vorerst beweisen, dass alle ganzen rationalen Invarianten der Transformation (4), d. h. also alle Polynome $f(\xi_i, \eta_k, \dots)$, für welche identisch in ξ_i, η_k, \dots die Gleichung

$$f(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_k, \dots) = M \cdot f(\xi_i, \eta_k, \dots)$$

gilt, wo M nur von α, β, \dots abhängt, einen endlichen Integritätsbereich bilden. Aus dessen Basisinvarianten ergibt sich nach (3) eine Rationalbasis der Invarianten $F(x_i, y_k, \dots)$ bei den Transformationen (2).

§ 2. Die Basisinvarianten $f(\xi, \eta, \dots)$.

Ist $f(\xi, \eta, \dots)$ bei T von (4) invariant, so auch bei T^m , d. h. bei den Transformationen ($m > \mu, \nu, \dots$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'_1 = \xi_1 + \binom{m}{1} \frac{1}{\alpha} \xi_2 + \binom{m}{2} \frac{1}{\alpha^2} \xi_3 + \dots + \binom{m}{\mu} \frac{1}{\alpha^\mu} \\ \xi'_2 = \xi_2 + \binom{m}{1} \frac{1}{\alpha} \xi_3 + \dots + \binom{m}{\mu-1} \frac{1}{\alpha^{\mu-1}} \\ \dots \\ \xi'_\mu = \xi_\mu + \frac{m}{\alpha} \\ \eta'_1 = \eta_1 + \binom{m}{1} \frac{1}{\beta} \eta_2 + \dots \\ \dots \\ \eta'_\nu = \eta_\nu + \frac{m}{\beta} \end{array} \right\} \text{u.s.w.} \quad (5)$$

wo die u_j Polynome der absoluten T -Invarianten $f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_{\mu-1}$, also selbst absolute T -Invarianten sind. Aus $f_i = \bar{f}_i$ folgt dann nach (4):

$$\xi_i + u_1 \xi_\mu + \dots + u_{\mu-i+1} \xi_\mu^{\mu-i+1} = \xi_i + \frac{1}{\alpha} \xi_{i+1} + \\ + u_1 \left(\xi_\mu + \frac{1}{\alpha} \right) + \dots + u_{\mu-i+1} \left(\xi_\mu + \frac{1}{\alpha} \right)^{\mu-i+1}.$$

Setzt man rechts

$$\xi_{i+1} = f_{i+1} - v_1 \xi_\mu - v_2 \xi_\mu^2 - \dots - v_{\mu-i} \xi_\mu^{\mu-i}$$

ein, so ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{l} 0 = \frac{1}{\alpha} f_{i+1} + \frac{u_1}{\alpha} + \frac{u_2}{\alpha^2} + \dots + \frac{u_{\mu-i+1}}{\alpha^{\mu-i+1}} \\ \frac{1}{\alpha} v_1 = \frac{2}{\alpha} u_2 + \frac{3}{\alpha^2} u_3 + \dots + \binom{\mu-i+1}{2} \frac{u_{\mu-i+1}}{\alpha^{\mu-i}} \\ \frac{1}{\alpha} v_2 = \frac{3}{\alpha} u_3 + \dots + \binom{\mu-i+1}{3} \frac{u_{\mu-i+1}}{\alpha^{\mu-i-1}} \\ \dots \\ \frac{1}{\alpha} v_{\mu-i} = \binom{\mu-i+1}{\mu-i} \frac{u_{\mu-i+1}}{\alpha} \end{array} \right) \quad (8)$$

Hieraus sind $u_{\mu-i+1}, \dots, u_2, u_1$ als lineare Formen der v_j und f_{i+1} berechenbar.

Jetzt sei $J(\xi, \eta, \dots)$ eine T -Invariante. Drücken wir jedes ξ_i, η_k, \dots durch das zugehörige f_i ($i < \mu$), g_k ($k < \nu$), \dots aus, so geht J über in ein Polynom F mit

$$\bar{F} = F(f_i, g_k, \dots; \xi_\mu + \frac{1}{\alpha}, \eta_\nu + \frac{1}{\beta}, \dots) = M \cdot F(f_i, g_k, \dots; \xi_\mu, \eta_\nu, \dots).$$

Ordnen wir hier z.B. nach Potenzen von ξ_μ :

$$F = \xi_\mu^m F_0 + \dots,$$

so folgt $\bar{F}_0 = M \cdot F_0$, wo $F_0 = F_0(f_i, g_k, \dots; \eta_\nu, \dots)$ kein ξ_μ mehr enthält. Wir können dann annehmen, dass F absolut-invariant und ein Polynom der $f_i, g_k, \dots, f_{23}, \dots$ ist. Dann folgt $M=1$ und die Invariante (vgl. (7))

$$F' = F - \frac{1}{\alpha^m} f_{12}^m F_0$$

enthält kein ξ_μ^m mehr, hat also die Gestalt $F' = \xi_\mu^{m-1} F'_0 + \dots$. Behandeln wir F' ebenso wie F , so ergibt sich, dass f_i, g_k, \dots und die f_{ik} eine Integritätsbasis für alle T -Invarianten bilden.

Hierdurch ist die Aufgabe: Bestimmung aller A -Invarianten, zurückgeführt auf ein gelöstes Problem. Die Ermittlung der bei $A(F)$ (absoluten) Invarianten führt nämlich auf die Berechnung der Semiinvarianten von binären Formen der Graden μ, ν, \dots ¹⁾. Man rechnet leicht nach, dass die Basisinvarianten (6) die sog. "Protomorphen"²⁾ der zum ersten Felde gehörigen Binärform darstellen. Auch die von HILTON³⁾ berechneten quadratischen A -Invarianten finden sich hier: sie sind die quadratischen Semiinvarianten der zu den Feldern gehörigen binären Formen⁴⁾.

Wir schliessen mit der Bemerkung, dass bei einer singulären linearen Transformation (1) bei der also die Determinante $|a_i^k| = 0$ ist, keine endliche Integritätsbasis für die A -Invarianten existiert. Ist nämlich z.B. $\alpha = 0$, so wird nach (2) $\bar{x}_{\mu+1} = 0$; daher ist auch $\bar{x}_{\mu+1} \cdot \bar{G}(x) = 0$ für jedes Polynom G .

¹⁾ L. MAURER, Münchner Ber. 29 (1899), p. 147—175; R. WEITZENBÖCK, Acta Mathem. 58 (1932), p. 241.

²⁾ Vgl. E. B. ELLIOT, Algebra of Quantics, Oxford (1895), p. 210.

³⁾ H. HILTON, Proceed. London Mathem. Soc. 10 (1911), p. 423—445 und 11 (1912), p. 96—103.

⁴⁾ E. B. ELLIOT, l.c., p. 138.

Chemistry. — *Ist flüssiges Benzol allotrop?* Von ERNST COHEN und J. S. BUY. Erste Mitteilung.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

1. In einer vor zwei Jahren unter dem Titel „Allotropy of liquid Benzene“ veröffentlichten Abhandlung äussern ALAN W. C. MENZIES und D. A. LACOSS¹⁾ sich folgenderweise: "We wish here to point out that the rate of change with temperature of several physical properties of liquid benzene suffers a more or less abrupt alteration in the neighbourhood of 40°. The change is not conspicuously large and, doubtless for this reason, seems to have escaped comment, if not notice. Furthermore, inaccurate measurement may entirely mask the anomaly." Am Schlusse ihrer Mitteilung bemerken die Autoren: "The term allotropy is noncommittal, and has been used to cover cases both of physical and of chemical isomerism. It is applied in describing the two forms of liquid sulphur, and may be used in describing the findings reported by WOLFKE and MAZUR²⁾ in the cases of liquid nitrobenzene, ethyl ether and carbon bisulphide."

2. Nun wurde aber von ERNST COHEN und L. C. J. TE BOEKHORST³⁾ mittels sehr genauer Bestimmungen der Dichte bezw. der Viskosität des flüssigen Nitrobenzols als Temperaturfunktionen nachgewiesen, dass die

¹⁾ Proc. Nat. Acad. Sci. 18, 144 (1932).

²⁾ Nature 126, 993 (1930); 127, 270, 741, 893, 926; 128, 584, 673, 761 (1931).

³⁾ Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 35, 1016 (1932); Z. physik. Chem. B. 24, 241 (1934).

genannten physikalischen Eigenschaften dieses Stoffes sich im Temperaturintervall 3 bis 20° C. mittels Funktionen beschreiben lassen, welche eine Diskontinuität nicht aufweisen, sodass ein Grund das flüssige Nitrobenzol den allotropen Stoffen zuzuzählen, nicht vorliegt.

3. Im Folgenden soll nunmehr die Frage erörtert werden, ob auf Grund der von MENZIES und LACOSS herangezogenen Tatsachen der Schluss berechtigt ist, dass beim flüssigen Benzol Allotropie vorliegt.

Während wir später in einer ausführlichen Experimentalarbeit auf den Gegenstand zurückzukommen beabsichtigen, seien hier nur die von MENZIES und LACOSS angeführten Gründe, welche sich auf die Dichte, den Brechungsindex sowie auf die spezifische Wärme des flüssigen Benzols beziehen, näher erörtert.

Das spezifische Volumen.

Sie weisen darauf hin, dass, falls man die von SYDNEY YOUNG¹⁾ experimentell ermittelten Werte des spezifischen Volumens des flüssigen Benzols in ein rechtwinkliges Koordinatensystem als Temperaturfunktion aufträgt (Fig. 1, Kurven A), zwei gerade Linien entstehen, welche sich bei etwa

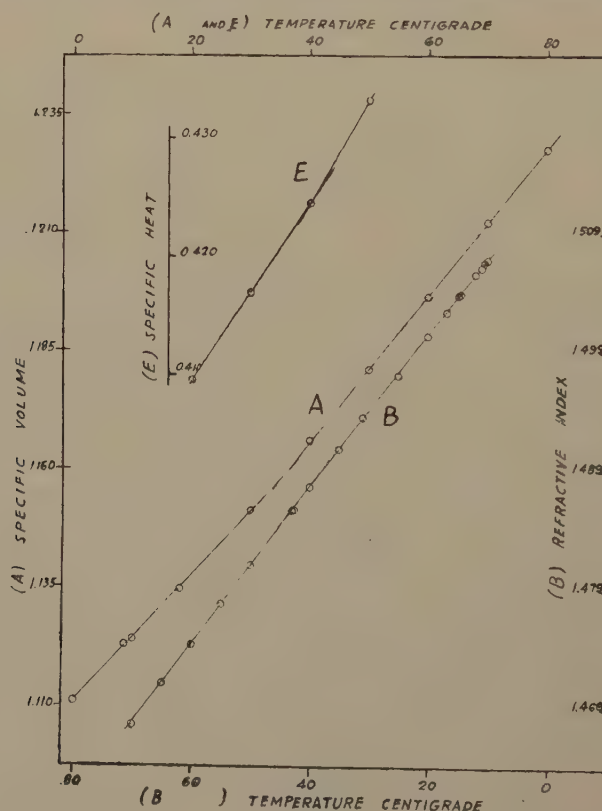


Fig. 1.

¹⁾ J. Chem. Soc. 55, 504 (1889).

36° C. schneiden. Verwendet man die von JULIUS MEYER und MYLIUS ¹⁾ beobachteten Werte des spezifischen Volumens, so findet man nach MENZIES und LACOSS einen Schnittpunkt, welcher um mehrere Gerade höher liegt.

4. Bevor wir uns dem Zahlenmaterial zuwenden, auf welchem die Schlüsse von MENZIES und LACOSS fussen, sei hier nochmals ²⁾ betont, dass selbst wenn ein Knick in den von ihnen betrachteten Kurven vorläge, daraus nicht auf die Existenz einer Allotropie geschlossen werden dürfte.

5. Betrachten wir nunmehr das von MENZIES und LACOSS herangezogene Zahlenmaterial SYDNEY YOUNG's näher, und setzen wir vorläufig voraus, dass das von ihm verwendete Präparat genügend rein war ³⁾ für die Versuche, um welche es sich hier handelt, so lässt sich die von YOUNG bestimmte Dichte des Benzols zwischen 11 und 72° C. mittels der nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Gleichung:

$$d_t = 0.90005 - 1.0636 \times 10^{-3} t - 0.0376 \times 10^{-6} t^2 - 2.213 \times 10^{-9} t^3. \quad (1)$$

als Temperaturfunktion darstellen ⁴⁾ wie sich aus Tabelle 1 ergibt. Die

TABELLE 1.
Dichte des Benzols zwischen 10 und 70° C.

Temp. °C.	Beobachtet YOUNG	Beobachtet BIRON	Berechnet nach Gleichung 1	(Beob. Mittel — Berechnet) $\times 10^4$
10.0	0.8895	0.88930	0.8894	± 0
20.0	0.8790	0.87865	0.8787	+ 1
30.0	0.8685	0.86796	0.8680	+ 3
40.0	0.8576	0.85721	0.8573	+ 1
50.0	0.8466	0.84639	0.8465	± 0
60.0	0.8357	0.83546	0.8356	± 0
70.0	0.8248	0.82442	0.8246	± 0

¹⁾ Z. physik. Chem. **95**, 355 (1920).

²⁾ ERNST COHEN und L. C. J. TE BOEKHORST, Z. physik. Chem. B. **24**, 241 (1934); Speziell daselbst § 18.

³⁾ Hierüber könnte man im Zweifel sein, wenn man das von YOUNG beschriebene Reinigungsverfahren [Phil. Mag. (5) **23**, 61 (1887)] im Zusammenhang mit den späteren Untersuchungen von TH. W. RICHARDS und seinen Mitarbeitern [J. Am. Chem. Soc. **36**, 1825 (1914); **41**, 2019 (1919)], sowie mit denen von MENZIES und LACOSS [J. phys. Chem. **36**, 1967 (1932)] näher betrachtet. Wir kommen darauf in einer späteren Abhandlung zurück. YOUNG (Sci. Proc. Roy. Dublin Soc. New Ser. **12**, 374 (1909—1910). Speziell daselbst Seite 385, gibt für $d_{40}^{00} = 0.90006$; Siedepunkt bei 760 mm Druck 80.2° C.

⁴⁾ Vergl. Intern. Critical Tables **3**, 27 (1928).

von BIRON¹⁾ ermittelten Dichten des Benzols bei den aufgeführten Temperaturen schliessen sich ebenfalls der obigen Formel an. Da Doppelbestimmungen bei gegebener Temperatur von den genannten Autoren nicht vorliegen, hält es schwer über die Genauigkeit ihrer Messungen Näheres auszusagen. Jedenfalls ergibt sich vorläufig aus dem YOUNGSchen Material, sowie aus dem von BIRON, dass die Kurve, welche die Dichte des flüssigen Benzols zwischen 10 und 70° C. als Temperaturfunktion darstellt, eine glattverlaufende ist und nicht, wie MENZIES und LACOSS glauben, aus zwei Geraden besteht, welche sich bei etwa 36° C. schneiden.

6. MEYER und MYLIUS geben ihr Versuchsmaterial in folgender Tabelle 2, in welcher d_{40}^t die Dichte, v das spezifische Volumen des Benzols darstellt. Dabei haben sie die direkt beobachteten Werte von d graphisch auf runde Temperaturen umgerechnet.

TABELLE 2.
Dichte und spezifisches Volumen des Benzols zwischen 0 und 70° C.
Nach JULIUS MEYER und MYLIUS.

Temperatur in C°	d_{40}^t beob.	v beob.	v ber.	$(v_{\text{beob.}} - v_{\text{ber.}}) \times 10^4$
0.0	0.9002	1.1109	1.1111	— 2
10.0	0.8894	1.1244	1.1243	+ 1
20.0	0.8791	1.1375	1.1379	— 4
30.0	0.8677	1.1525	1.1519	+ 6
40.0	0.8576	1.1661	1.1664	— 3
50.0	0.8467	1.1810	1.1813	— 3
60.0	0.8352	1.1973	1.1967	+ 6
70.0	0.8247	1.2125	1.2125	± 0

MENZIES und LACOSS bemerken hierzu: "If the specific volumes as observed by MEYER and MYLIUS are similarly graphed the point of intersection is found several degrees higher" (als 36° C.).

7. Wendet man indes die Methode der kleinsten Quadrate an zur Ermittlung einer Kurve, welche das spezifische Volumen zwischen 0 und 70° C. als Temperaturfunktion beschreibt, so findet man:

$$v_t = 1.1111 + 0.01294 \frac{t}{10} + 0.00022 \left(\frac{t}{10} \right)^2 \quad \dots \quad (2)$$

Dass diese Kurve den Verlauf des spezifischen Volumens in dem genannten Temperaturintervall darstellt, ergibt sich aus der Kolumne 5 der Tabelle 2.

¹⁾ J. Russ. Phys. Chem. Soc. **42**, 135 (1910).

Da auch bei MEYER und MYLIUS Doppelversuche nicht vorliegen, lässt sich über die Genauigkeit ihrer Messungen nichts aussagen. Im allgemeinen liegen bedeutende Abweichungen zwischen den von ihnen und von YOUNG gemessenen Dichten nicht vor. Die betreffende Kurve verläuft auch hier kontinuierlich, sodass von einem Knick nicht die Rede ist.

Der Brechungsindex.

8. Aus dem von PARKER und THOMPSON¹⁾ für den Brechungsindex des flüssigen Benzols bei verschiedenen Temperaturen im Intervall 10 bis 70° C. gefundenen Werten (Tabelle 3) schliessen MENZIES und LACOSS auf einen gradlinigen Verlauf zwischen 10 und 43° bzw. zwischen 43 und 70° C. (Fig. 1, Kurven B). Zunächst sei hier betont, dass die Doppelbestimmungen von PARKER und THOMPSON darauf hinweisen, dass die Genauigkeit ihrer Messungen bis zur vierten Dezimale reicht. Berechnet man aus ihren direkt beobachteten Werten (Tabelle 3) mittels der Methode der kleinsten Quadrate eine Gleichung, welche den Verlauf des Brechungsindex zwischen 10 und 70° als Temperaturfunktion beschreibt, so findet man:

$$n = 1.5128^9 - 0.0061559 \frac{t}{10} - 0.0000475 \left(\frac{t}{10} \right)^2 \dots (3)$$

Die Kolumnen 3 und 4 der Tabelle 3 zeigen, dass diese Gleichung, welche wir Herrn Dr. L. C. J. TE BOEKHORST hierselbst verdanken, dem Tatbestande entspricht. Auch hier also ein kontinuierlicher Verlauf.

TABELLE 3.

Brechungsindex des Benzols zwischen 10 und 70° C. nach PARKER und THOMPSON.

t in C°	$n_{\text{gef.}}$	$n_{\text{ber.}}$	$(n_{\text{gef.}} - n_{\text{ber.}}) \times 10^4$
10.0	1.5068	1.5067	+ 1
20.0	1.5002	1.5004	— 2
30.0	1.4940	1.4940	± 0
40.0	1.4876	1.4875	+ 1
50.0	1.4809	1.4809	± 0
60.0	1.4742	1.4742	± 0
70.0	1.4675	1.4675	± 0

Die Frage ob das von diesen Autoren verwendete Präparat den höchsten Anforderungen chemischer Reinheit genügt, soll hier nicht weiter erörtert

¹⁾ J. Chem. Soc. 121, 1341 (1922).

werden. Nur sei darauf hingewiesen, dass MENZIES und LACOSS selbst für reines Benzol fanden $n_D^{20} = 1.5014$, während PARKER und THOMPSON dafür den Wert 1.5002 beobachteten.

Die spezifische Wärme.

9. Auch den Verlauf der spezifischen Wärme des flüssigen Benzols zwischen 0 und 58° C. glauben MENZIES und LACOSS mittels zweier sich schneidender Geraden (Fig. 1, Kurven *E*), darstellen zu können. Auf Grund der Messungen von TRÉHIN¹⁾ sollte der Schnittpunkt bei etwa 44° C. liegen, während sie darauf hinweisen, dass die Versuche von WILLIAMS und DANIELS einen solchen Schnittpunkt nicht liefern. Es scheint hier ein Irrtum in der Mitteilung von MENZIES und LACOSS vorzuliegen, da TRÉHIN betont, dass sich die spezifischen Wärmen des reinen Benzols zwischen 16 und 58° C. mittels einer einzigen Gleichung

$$x = 0.405 + 93 \cdot 10^{-5} (t - 15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

darstellen lassen, wie dies in der von ihm mitgeteilten Tabelle (Tabelle 4) zum Ausdruck kommt.

TABELLE 4.

Spezifische Wärmen des Benzols zwischen 10 und 58° C. nach TRÉHIN.

t in C°	$x_{\text{gef.}}$	$x_{\text{ber.}}$	$(x_{\text{ber.}} - x_{\text{gef.}}) \times 10^3$
16.21	0.402	0.406	+ 4
20.22	0.412	0.410	— 2
24.04	0.415	0.413	— 2
27.57	0.418	0.417	— 1
30.98	0.419	0.420	+ 1
34.83	0.424	0.423	— 1
38.84	0.426	0.427	+ 1
42.80	0.429	0.431	+ 2
46.77	0.433	0.435	+ 2
50.44	0.437	0.438	+ 1
54.43	0.443	0.442	— 1
58.19	0.449	0.445	— 4

Auch hier soll indes dahingestellt bleiben, ob das von TRÉHIN verwendete Benzol den höchsten Anforderungen chemischer Reinheit genügt. Jeden-

¹⁾ Ann. Phys. 15, 246 (1921).

falls liegt also auch bei den bisher bekannten Messungen der spezifischen Wärme des Benzols als Temperaturfunktion¹⁾ kein Grund vor für die Annahme der Existenz des von MENZIES und LACOSS erwähnten Schnittpunktes bei etwa 44° C.

Zusammenfassung.

Es wurde darauf hingewiesen, dass der Schluss von MENZIES und LACOSS, nach welchem die Temperaturkurven der Dichte, des Brechungsindex bzw. der spezifischen Wärme des flüssigen Benzols zwischen 0 und 70° C. einen Knick aufweisen, sich im Widerspruch befindet mit den Beobachtungen, auf welchen dieser Schluss fusst. Aber auch falls ein Knick in diesen Kurven tatsächlich vorläge, wäre es verfehlt daraus auf Allotropie des flüssigen Benzols zu schliessen.

VAN 'T HOFF-Laboratorium.

Utrecht, Januar 1934.

¹⁾ Vergl. auch WILLIAMS und DANIELS, J. Am. Chem. Soc 46, 1569 (1924).

Chemistry. — *The Exact Measurement of the Specific Heats of Solid Substances at Higher Temperatures. XIII. The Specific Heats of Vanadium, Niobium, Tantalum and Molybdenum from 0° to 1500° C.* By F. M. JAEGER and W. A. VEENSTRA.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

§ 1. In this paper we shortly communicate the results of the measurements of the specific heats of the metals *vanadium*, *niobium* and *tantalum*, all belonging to the fifth group and of *molybdenum*, belonging to the sixth group of the periodical system; for details, we must refer to a future publication on this subject in the *Recueil des Travaux des Chimistes des Pays-Bas*. Purest *vanadium* was most kindly furnished us in solidified grains by the *Vanadium Corporation of America* in *Bridgeville* (Pa); *niobium* and *tantalum* in the form of massive bars by the *Fan Steel Company* in *Chicago*; *molybdenum* in the shape of a compressed bar by the *PHILIPS' Incandescent Lamps Industry* in *Eindhoven*. All metals proved to be practically free from impurities, only traces of iron being present. They all crystallise in the cubic system, with a body-centred cell containing two atoms: the edges of the cell are consecutively: $a_0 = 3,04 \text{ \AA.}$; $3,31 \text{ \AA.}$; $3,32 \text{ \AA.}$, and $3,14 \text{ \AA.}$, the densities: 5,98; 8,3; 16,3; and 10,21 respectively. *Vanadium* melts at 1715° C., *niobium* between 1700° and 1950° C., *tantalum* between 2800° and 3000° C., *molybdenum* at 2622° C. All metals were preliminarily brought into the "stabilized" condition by a suitable

thermal treatment; they don't show any indication of allotropic changes, nor of retardation-phenomena.

The measurements at each temperature were repeated several times; the values given proved to be reproducible within 0,1—0,2%, even at the highest temperatures.

§ 2. *Vanadium*. After stabilization the metal yielded perfectly constant values for \bar{c}_p , which are expressed by:

$$\bar{c}_p = 0,11846 + 0,156867 \cdot 10^{-4} \cdot t - 0,225132 \cdot 10^{-8} \cdot t^2 + 0,3546 \cdot 10^{-12} \cdot t^3.$$

The true specific heats c_p , therefore, are:

$$c_p = 0,11846 + 0,313734 \cdot 10^{-4} \cdot t - 0,675396 \cdot 10^{-8} \cdot t^2 + 0,14184 \cdot 10^{-11} \cdot t^3$$

and the atomic heat C_p by:

$$C_p = 6,0414 + 0,1600 \cdot 10^{-2} \cdot t - 0,34446 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 + 0,7234 \cdot 10^{-9} \cdot t^3.$$

Some values of c_p and C_p thus calculated are collected in Table I.

TABLE I. True specific Heats and Atomic Heats C_p of Vanadium.		
Temperature in °C. :	True specific Heats C_p :	Atomic Heats C_p :
0°	0,1185	6.044
100	0,1215	6.196
200	0,1245	6.349
300	0,1273	6.492
400	0,1300	6.630
500	0,1327	6.768
600	0,1352	6.895
700	0,1376	7.018
800	0,1400	7.140
900	0,1422	7.252
1000	0,1445	7.369
1100	0,1467	7.482
1200	0,1488	7.589
1300	0,1509	7.696
1400	0,1530	7.803
1500	0,1551	7.910

The value of $C_p = 3R$ calories is already reached at -40° C. As no data concerning the compressibility κ and the thermal dilatation α of *vanadium* are available in the literature, no calculation of the corresponding values of c_v and C_v could be made with any degree of certainty. The C_p - t -curve for *vanadium* is reproduced in Fig. 1.

§ 3. *Niobium*. After heating the metal at 1400° C. for five hours in vacuo and slowly cooling, the values of \bar{c}_p proved to remain constant. They can be expressed by:

$$\bar{c}_p = 0,06430 + 0,386383 \cdot 10^{-5} \cdot t + 0,078258 \cdot 10^{-8} \cdot t^2.$$

The true specific heats, therefore, by:

$$c_p = 0,06430 + 0,772766 \cdot 10^{-5} \cdot t + 0,234774 \cdot 10^{-8} \cdot t^2,$$

and the atomic heats by:

$$C_p = 6,0120 + 0,722533 \cdot 10^{-3} \cdot t + 0,21952 \cdot 10^{-6} \cdot t^2.$$

Some of the values of c_p and C_p for a series of temperatures are calculated in Table II and graphically reproduced in Fig. 1.

TABLE II. True specific and Atomic Heats of Niobium.		
Temperature t in $^\circ\text{C}.$:	True specific Heat c_p :	Atomic Heat C_p :
0°	0.06430	6.012
100	0.06510	6.087
200	0.06594	6.165
300	0.06683	6.249
400	0.06777	6.337
500	0.06875	6.423
600	0.06978	6.524
700	0.07086	6.626
800	0.07198	6.730
900	0.07316	6.840
1000	0.07437	6.954
1100	0.07564	7.072
1200	0.07695	7.195
1300	0.07832	7.323
1400	0.07973	7.455

Niobium is somewhat less compressible than *iron*¹⁾: at 30° C. $\kappa = 5,70 \cdot 10^{-7}$, at 75° C. $\kappa = 5,778 \cdot 10^{-7}$ KG/cm². However, no data

¹⁾ P. W. BRIDGMAN, Proceed. Amer. Acad. of Arts and Sciences, 68, (1933), 28.

for the thermal dilatation of this metal are given in the literature, so that no values for c_p and C_p could be calculated. Also in this case the value of $C_p = 3R$ calories appears to be reached below 0°C .

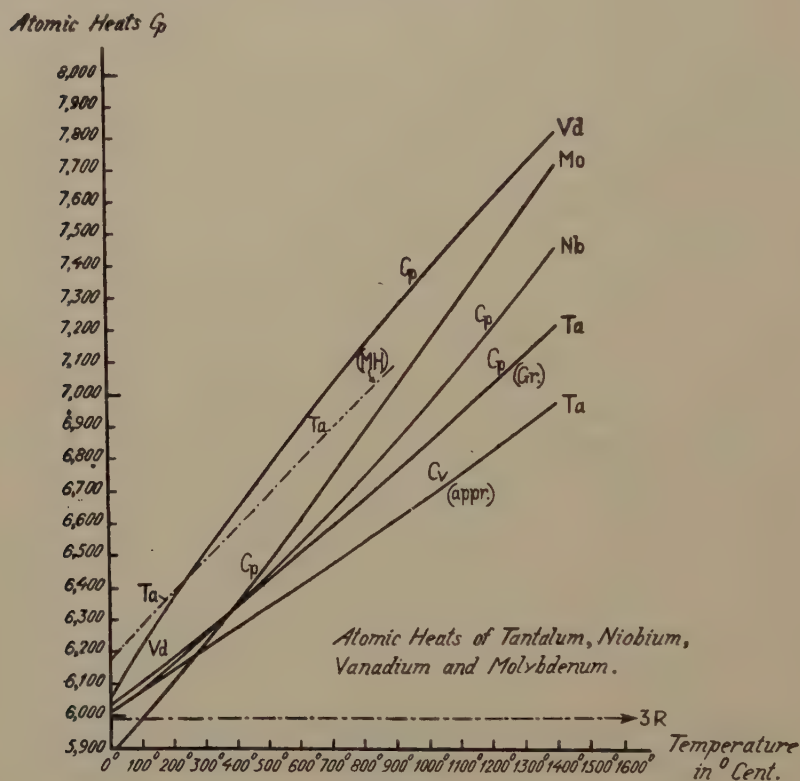


Fig. 1.

§ 4. *Tantalum*. The specific heats of this metal till 900°C . were already determined by MAGNUS and HOLZMANN¹⁾; their values do, however, rather appreciably differ from our results. The lumps were stabilized at 1400°C . by heating in a vacuum for three and then for six hours and slowly cooling. The mean specific heats \bar{c}_p can be expressed by:

$$\bar{c}_p = 0,033218 + 0,2099 \cdot 10^{-5} \cdot t + 0,10983 \cdot 10^{-9} \cdot t^2;$$

the true specific heats c_p , therefore, by:

$$c_p = 0,033218 + 0,4198 \cdot 10^{-5} \cdot t + 0,3295 \cdot 10^{-9} \cdot t^2,$$

and the atomic heats C_p by:

$$C_p = 6,0244 + 0,38066 \cdot 10^{-3} \cdot t + 0,19919 \cdot 10^{-7} \cdot t^2.$$

For a series of temperatures the values of c_p and C_p thus calculated, are represented in Table III.

¹⁾ A. MAGNUS and H. HOLZMANN, Ann. der Phys., (5), 3, (1929), 596.

TABLE III.
True Specific Heats c_p and Atomic Heats C_p of Tantalum.

Temperature in °C :	c_p	C_p (this Laboratory):	C_p (MAGNUS: HOLZMANN):
0°	0.03322	6.024	6.174
100	0.03364	6.101	6.275
200	0.03407	6.179	6.376
300	0.03450	6.257	6.477
400	0.03495	6.339	6.578
500	0.03540	6.420	6.679
600	0.03585	6.502	6.780
700	0.03632	6.587	6.881
800	0.03679	6.672	6.982
900	0.03726	6.757	7.082
1000	0.03774	6.844	(7.183)
1100	0.03823	6.933	(7.284)
1200	0.03873	7.024	(7.385)
1300	0.03923	7.115	(7.486)
1400	0.03974	7.207	(7.587)

The c_p - t - and C_p - t -curves are almost straight lines, with a feeble increase of $\left(\frac{\partial C_p}{\partial t}\right)$ at higher temperatures. The inclination of the C_p - t -line of MAGNUS and HOLZMANN who found a linear dependency of C_p on t , as well as the absolute values of C_p at corresponding temperatures are both appreciably greater than those following from our measurements. In both cases, however, the value $C_p = 3R$ calories is already reached at a temperature below 0° C.; already at a temperature no less than 1600° C. lower than the meltingpoint, C_p becomes equal to 7,0 calories, without any indication of a slower increase at higher temperatures. An approximate estimation of C_p teaches, that also this number surpasses the value $3R$ calories below 0° C.; see Fig. 1.

§ 5. *Molybdenum*. After heating the metal in a vacuum crucible at 1400° C. during 4, 8 and 12 hours, the values of \bar{c}_p proved not to vary any more. They can be expressed by:

$$\bar{c}_p = 0,061046 + 0,0616043 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0,0345454 \cdot 10^{-8} \cdot t^2.$$

The true specific heats, therefore, by:

$$c_p = 0,061046 + 0,1232086 \cdot 10^{-4} \cdot t + 0,103636 \cdot 10^{-8} \cdot t^2$$

and the atomic heats C_p by:

$$C_p = 5,8604 + 0,11828 \cdot 10^{-2} \cdot t + 0,9949 \cdot 10^{-7} \cdot t^2.$$

Some of these values are, for a series of temperatures, calculated and collected in Table IV.

Temperature t in $^{\circ}\text{C}.$:	c_p :	C_p :
0°	0.06105	5.860
100	0.06229	5.980
200	0.06355	6.101
300	0.06484	6.224
400	0.06614	6.349
500	0.06746	6.476
600	0.06881	6.606
700	0.07018	6.737
800	0.07157	6.870
900	0.07297	7.005
1000	0.07440	7.143
1100	0.07585	7.282
1200	0.07732	7.423
1300	0.07881	7.566
1400	0.08033	7.711

The value of $C_p = 3R$ calories is already reached a little above $100^{\circ}\text{C}.$; even at a temperature no less than $1100^{\circ}\text{C}.$ below its meltingpoint; the metal yields a value for C_p of about 8,0 calories, without there being any indication of a less rapid increase of C_p at higher temperatures. The inclination of the curve with respect to the axis of temperatures is appreciably steeper than in the case of *Nb* and *Ta* (See Fig. 1). From the measurements of κ by BRIDGMAN¹⁾ and those of α by DISCH²⁾, FINK³⁾ and HIDNERT-GERO⁴⁾, the values of C_p approximately can be estimated: at $500^{\circ}\text{C}.$ the value C_p must be about: 6,40, so that, — just as in the case of *tungsten*, — the C_p - t - and C_v - t -curves seem not to deviate strongly from each other⁵⁾.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and
Physical Chemistry of the University.*

¹⁾ P. W. BRIDGMAN, loco cit.

²⁾ J. DISCH, Zts. f. Physik, **5**, (1921), 173.

³⁾ C. F. FINK, Trans. Amer. Electrochem. Soc., **17**, 233.

⁴⁾ P. HIDNERT and W. B. GERO, Scient. Papers Bur. Standards, **19**, (1924), 429.

⁵⁾ F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM, Recueil d. Trav. chim. Pays-Bas, **51**, (1932), 7, 11.

Chemistry. — *The Exact Measurement of the Specific Heats of Solid Substances at Higher Temperatures. XIV. The Specific Heats and Thermal Retardation-Phenomena of Beryllium.* By F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM.

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

§ 1. In two successive papers from this laboratory¹⁾, we have drawn attention to the remarkable retardation-phenomena, which occur if compact, crystalline *beryllium* is heated at temperatures of 500° or 600° C. and then is dropped into the calorimeter; and to the occurrence of new diffraction-lines in the *X*-rayspectrum of the metal, if this be heated for a long time at 630° C., — these new lines apparently corresponding to another hexagonal structure of the metal, which was called by us the β -modification, in contrast to the ordinary α -form.

In the first place, we now have studied the said retardation-phenomena more in detail, especially since we observed apparently analogous phenomena in the case of *zirconium* and *thorium*. Lumps of beautifully crystallized, macrocrystalline *beryllium* were enclosed in an evacuated platinum crucible and very carefull measurements of its specific heats were made in the vicinity of 300°, 350° and 400° C. Soon it became clear that a distinct influence of the duration of the heating and subsequent cooling on the numerical valeus of \bar{c}_p can be stated. In Fig. 1 the values of \bar{c}_p observed in a series of such experiments are graphically represented. They clearly show, that a sample of the metal, which was not yet subjected to preliminary heatings, manifests a rapid increase of \bar{c}_p at about 388° C., while between 399° and 410° C. \bar{c}_p remained practically constant (curve I); the sudden break in the curve, however, proves in subsequent heatings, gradually to be smoothed-out, as is seen from the curves II—IV. The values of \bar{c}_p , moreover, prove to be strongly variable at the same temperature. This fact doubtlessly demonstrates, that a change in the metal occurs, which during the interval of time elapsed after its heating and cooling, does not completely go back: the metal does *not* return to its original condition²⁾.

1) F. M. JAEGER and E. ROSENBOHM, *Proceed. R. Acad. Sciences Amsterdam*, **35**, (1932), 1055; F. M. JAEGER and J. E. ZANSTRA, *ibidem*, **36**, (1933), 636.

2) The numbers between () indicate the series-numbers of the subsequent heatings; each experiment took about one day.

A great number of successive experiments was made, — care being taken not to heat the metal above 410°C . The results obtained are collected

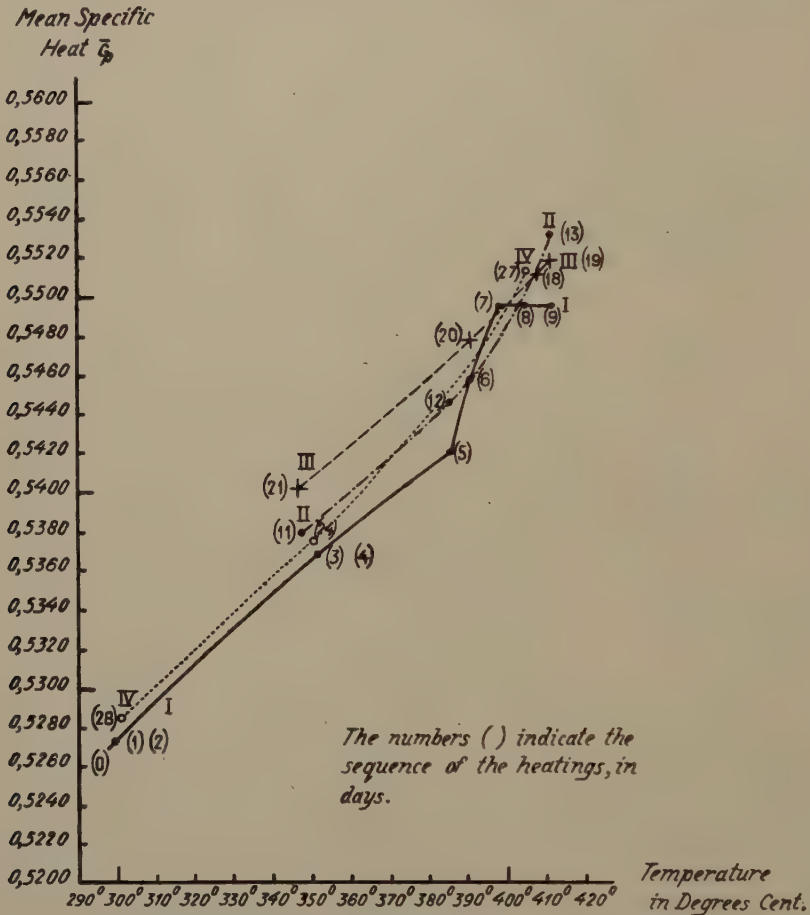


Fig. 1. Variability of \bar{c}_p of Beryllium on repeatedly Heating.

in Table I and graphically represented in Fig. 2, in which the values of \bar{c}_p

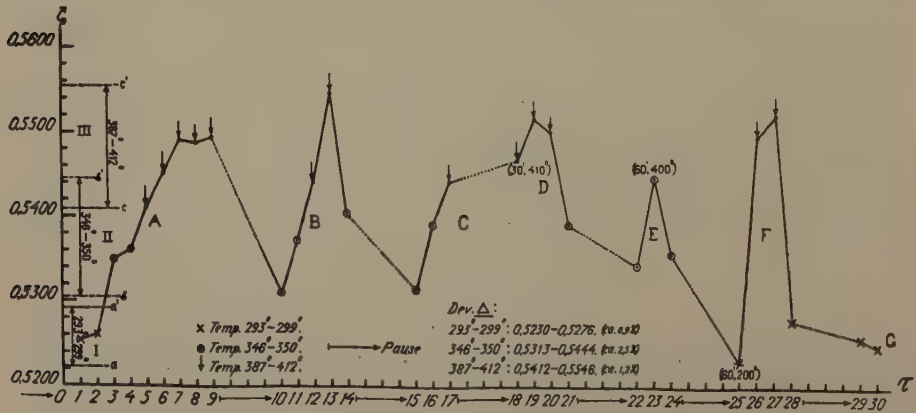


Fig. 2. Variability of \bar{c}_p of Beryllium with the time τ of Heating and cooling

TABLE I.
Variations of \bar{c}_p of Beryllium with Time of Heating and Cooling.

Sequence of Heatings and Time τ elapsed in Days:	Temperature t °C. of Measurement:	Value of the Mean specific Heat \bar{c}_p observed:
1	297°.79	0.5258
2	293.71	0.5262
3	347.52	0.5350
4	348.00	0.5362
5 } Series A	387.25	0.5413
6	391.71	0.5451
7	393.67	0.5487
8	399.79	0.5488
9	409.32	0.5487
Pause of 3 days		
10	346.41	0.5313
11	349.43	0.5376
12 } Series B	386.92	0.5441
13	412.55	0.5545
14	350.64	0.5407
Pause of 3 days		
15	346.30	0.5313
16 } Series C	347.53	0.5391
17	391.73	0.5440
Pause of 3 days, (first heated 30 Min. at 410° and then 3 hours at 392°, 32)		
18	392.32	0.5468
19 } Series D	410.52	0.5516
20	408.26	0.5502
21	347.65	0.5393
Pause of 3 days		
22	347.60	0.5337
(first heated 60 Min. at 400° and then 3 hours at 348°, 7 C., etc.)		
23 } Series E	348.73	0.5444
24	347.45	0.5360
Pause of 3 days, (first heated 60 Min. at 200° and then 3 hours at 296°, 84 C., etc.)		
25	296.84	0.5229
26 } Series F	408.09	0.5495
27	406.07	0.5518
28	299.25	0.5275
Pause of 3 days		
29 } Series G	298.14	0.5257
30	298.38	0.5250

observed are plotted against the time τ elapsed between the subsequent heatings. The seven series (A—G) of experiments cover an interval of about 48 days. Within the field aa' all values of \bar{c}_p between 293° and 299° C. are represented; within bb' all those between 346° and 350° C.; within cc' those between 387° and 412° C. At once it becomes clear, that a heating at a constant higher temperature t' causes the value of \bar{c}_p at a given lower temperature t to *increase* with respect to the value formerly observed at that temperature t ; on the other hand, that the value of c_p previously found at t° , always appears noticeably to be *diminished*, if the sample be kept at room-temperature for three days and only increases again, if the metal be heated a second time.

The deviations of \bar{c}_p at temperatures between 293° and 299° C. amount to 1 %, those between 346° and 350° C. to about 2.5 %, those between 387° and 412° C. to about 1.2 % of the absolute values and are, therefore, 10—20 times greater than the mean experimental error of the method used. Within certain limits, at each temperature one can find all arbitrary values of \bar{c}_p at any temperature t , — these being wholly dependent on the preliminary thermal treatment of the metal and the time τ since elapsed. In these experiments the time-interval between the moment of dropping the sample into the calorimeter and that at which the maximum temperature t'' of the calorimeter was reached, originally was 16 minutes; but as soon as the metal is heated above 500° — 600° C. this interval increases enormously: at 500° C. to 25, at 630° to 45, at 800° C. to 53 minutes, and it still remains 53 minutes, even after returning to 370° C. The complete recurrence of the metal into its original condition takes longer than 9 or 10 months; but it is highly remarkable, that even after so short a time as 3 days, a distinct recurrence towards this "normal" state already proves to be observable.

§ 2. A bar of *beryllium* of American origin manifested these phenomena to a still higher degree than the German preparation, — the interval mentioned here being more than $1\frac{1}{2}$ hours. Suspicion arose, that the dimensions of the lumps used might perhaps prove also to play a role in the behaviour of the metal, — the more as the experience gathered in the case of *zirconium* and *thorium* pointed into the same direction. Therefore, the sample used in the foregoing experiments was preliminarily divided into two portions and one half very finely ground and the powder thus obtained enclosed within an evacuated platinum crucible. This time, the heat-development proved to be quite "normal" indeed: between 100° and 1065° C. no retardation-effect now was any more stated, so that the values of Q_0 could be determined with a fair degree of accuracy. The results of these measurements are represented in Table II. The mean specific heats \bar{c}_p can be expressed by:

$$\bar{c}_p = 0,414032 + 0,359947 \cdot 10^{-3} \cdot t - 0,740474 \cdot 10^{-7} \cdot t^2 - \\ - 0,359176 \cdot 10^{-9} \cdot t^3 + 0,313094 \cdot 10^{-12} \cdot t^4.$$

TABLE II.
The Mean Specific Heats of "normal" Beryllium.

Temperature t of Observation:	Final temperature t' of the Calorimeter:	Quantity of Heat Q developed between t and t' by 1 Gr. of the metal:	Quantity of Heat Q_0 developed by 1 Gr. of the metal between t and $0^\circ\text{C}.$:	Mean Specific Heat \bar{c}_p	
				(observed):	(calculated from the formula):
99.80	20.375	36.100	44.800	0.4489	—
99.84	20.377	36.118	44.818	0.4489	—
197.73	20.89	85.454	94.374	0.4773	0.4800
296.93	21.09	141.77	150.78	0.5078	0.5079
298.72	21.17	142.67	151.71	0.5079	—
392.53	21.27	199.01	208.09	0.5301	0.5297
392.90	21.37	199.30	208.42	0.5305	0.5300
417.31	20.97	214.21	223.16	0.5347	0.5347
439.57	21.50	227.59	236.77	0.5386	0.5391
450.79	21.69	234.74	244.00	0.5413	—
499.56	21.06	266.09	275.08	0.5506	0.5501
549.58	21.73	297.69	306.98	0.5586	0.5584
631.35	21.57	351.36	360.58	0.5711	—
801.69	22.66	470.75	480.43	0.5993	—
1064.97*	23.02	(650.80)	(669.63)	(0.6288)	(0.6823)

* At this temperature the platinum crucible proved to be somewhat attacked by the metal. Weight of the platinum crucible = 27.2994 Gr.; weight of the beryllium: 4.1682 Gr.

Therefore, the true specific heats c_p by:

$$c_p = 0.414032 + 0.719894 \cdot 10^{-3} \cdot t - 0.2221422 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - \\ - 0.1436704 \cdot 10^{-8} \cdot t^3 + 0.156547 \cdot 10^{-11} \cdot t^4,$$

and the atomic heats C_p by:

$$C_p = 3.73457 + 0.64935 \cdot 10^{-2} \cdot t - 0.20037 \cdot 10^{-5} \cdot t^2 - \\ - 0.12959 \cdot 10^{-7} \cdot t^3 + 0.14122 \cdot 10^{-10} \cdot t^4.$$

Some of the values of c_p and C_p thus calculated are collected in Table III and graphically represented in Fig. 4.

In the first place it can be remarked that the only difference between this "normal" and the formerly used "abnormal" beryllium is the degree of division of the metal and a slight superficial oxydation. On pulverisation of the metal, the finely divided particles of this very easily oxydizable metal become surrounded by an extremely thin layer of berylliumoxide and this, evidently, prohibits the change, locally started on heating, to

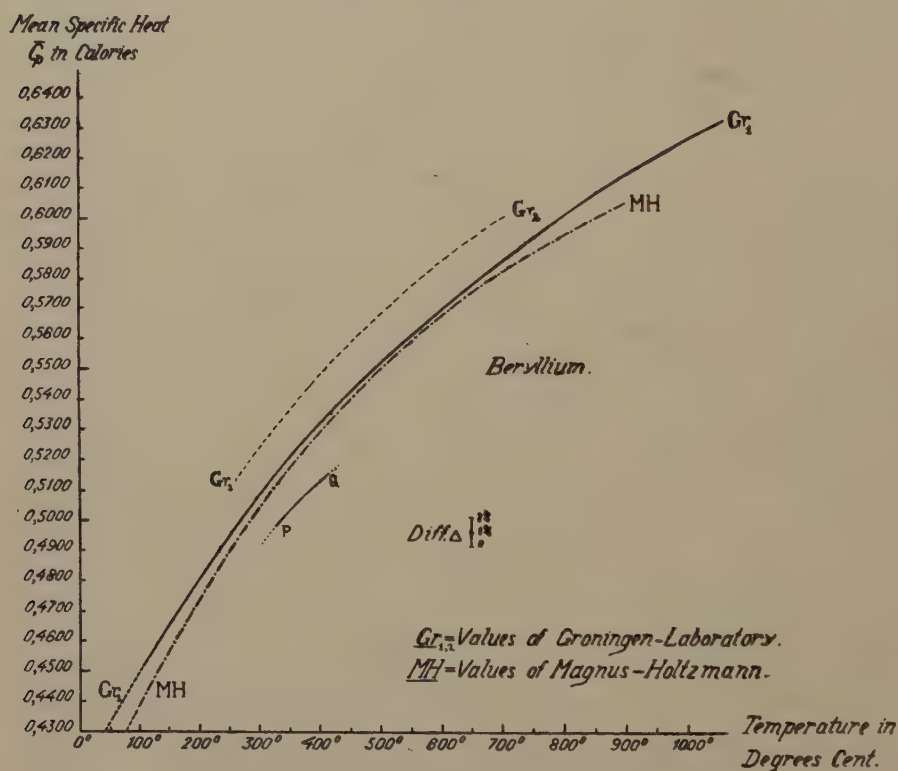


Fig.3. Mean Specific Heats of "normal" Beryllium.

spread through the whole mass. In this way no additional heat-development is any longer observed and the sample apparently behaves in a "normal" way. But this "normal" state is, properly speaking, an "abnormal" condition of the metal, as it corresponds to an innerly-paralysed condition. The values of \bar{c}_p measured with this powder, are in Fig. 3 represented by the curve Gr_2 , which lies somewhat higher than the more probable curve Gr , (see Table II), determined with a sample of the same origin as that used by MAGNUS and HOLZMANN¹⁾, who did not observe any retardation-phenomena. Their values of \bar{c}_p (curve MH in Fig. 3) are in fairly good agreement with ours; but all these values, corresponding to samples containing more or less berylliumoxide, probably are somewhat too high (3 or 3.5 %). The points P and Q in Fig. 3 correspond to the

¹⁾ A. MAGNUS and H. HOLZMANN, Ann. d. Phys. 3, (1929), 585.

TABLE III. True specific and atomic Heats c_p and C_p of "normal" Beryllium.		
Temp. t° :	True specific Heat c_p :	Atomic Heat C_p :
0°	0.4140	3.734
100	0.4825	4.352
200	0.5402	4.872
300	0.5839	5.267
400	0.6149	5.546
500	0.6364	5.740
600	0.6585	5.940
700	0.6924	6.246
800	0.7536	6.797
900	(0.8617)	(7.772)

values: $\bar{c}_p = 0,4978$ at $327^\circ,5$ C. and $\bar{c}_p = 0,5145$ at $419^\circ,4$ C., determined with a lump of *beryllium* not yet previously heated; the curve for this non-heated, compact material presumably seems to be about parallel to the curves Gr_1 and Gr_2 .

In the second place Fig. 4 teaches us that the curve for the true specific and atomic heats has an *inflection-point* S : the existence of this inflection-point also may be deduced from the formula of MAGNUS and HOLZMANN for c_p . It is situated between 506° and 638° C., — the latter value being calculated from the measurements of the German authors, and its place seems to correspond fairly well to values of the atomic heat in the neighbourhood of $3R$ calories, — C_p subsequently increasing at higher temperatures in an appreciably steeper way than before.

§ 3. The phenomena observed doubtlessly prove, that in the case of *beryllium* we have to deal with an *inner dynamical or mobile equilibrium of two different constituents of the metal*. The change certainly is of a *reversible* nature; but evidently strong passive resistances and retarding influences prohibit the complete establishment of the equilibrium at each temperature. Moreover, the recurrence of the high-temperature condition of the metal into that characteristic for lower temperatures, must be *exothermic*, i.e. must be accompanied by a development of heat.

If the α - and β -modifications of *beryllium* previously observed¹⁾ are

¹⁾ F. M. JAEGER and J. E. ZANSTRA, loco cit. Evidently the supposition of a monotropic relation between the two forms of the metal, must be rejected, after the true reversibility of the phenomena now has been established.

these components in the mobile equilibrium mentioned, then these equilibria at a whole series of temperatures only could occur *within a single*

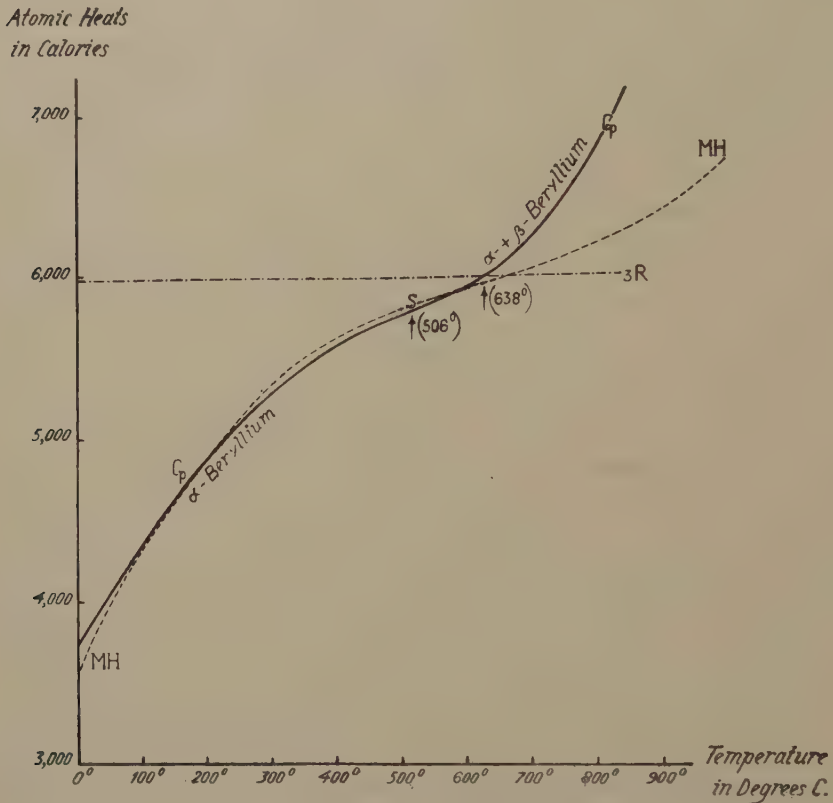


Fig. 4. Atomic Heats of "normal" Beryllium.

homogeneous phase of *varying composition*, i.e. within a mixed crystal or solid solution of α - and β -beryllium. But the difficulty here arising is, that the X-ray-analysis does *not* give any indication of the presence of such a solid solution: on the contrary, the spectra of the α - and the β -forms always do appear *besides* each other and they thus rather correspond to a mere *juxtaposition* of both lattices involved.

Prof. SMITS, to whom we are obliged to a number of valuable remarks in this respect, suggested to us, that the present case of metallic *beryllium* might perhaps better be understood as an example of a mobile, internal equilibrium of two "pseudo-components" δ and ϵ , which is shifted in the one or in the inverse direction by a change of the temperature. In this respect, he finally drew our attention to the possibility, that these two pseudocomponents might form a dimorphous series of mixed crystals in the solid phase showing a hiatus; so that *two* limiting, saturated mixed crystals of different compositions and both corresponding to the α -, respectively β -spectra observed, are at each temperature co-existent, —

the one kind (α -form) containing a large excess of the δ -component, the other kind (β -form) a large excess of the other component.

Below about 630°C , δ - and ε -beryllium then should behave as *real* components, not transformable into each other, while at much higher temperatures most probably an internal homogeneous equilibrium between them, as in a true pseudo-binary system would prove to exist. On cooling, the composition of each saturated mixed crystal then normally should be shifted along the two boundary-lines of the diagram; but the complete establishment of these successive heterogeneous equilibria evidently goes on in so extremely slow a way, that a very long interval of time is necessary for its total accomplishment. For this reason the retardation-phenomena described then are observed in the way mentioned above. The momentaneous state of the metal, — as composed of these two kinds of saturated mixed crystals, — cannot be indicated with any degree of certainty, as i.a. it depends on the more or less accidental content of δ - and ε -beryllium, acquired in the original process of preparation of the metal. The α - and β -spectra observed besides each other, thus must correspond to the two different types of saturated mixed crystals, co-existing at each temperature.

Even if this interpretation of the facts be true, the difficulty remains, that it is hardly possible to imagine *what* the two supposed constituents of the metallic phase possibly could be? SMITS in this respect suggests two possibilities: either there are two kinds of special arrangements of beryllium-atoms, which perhaps, in some way or other are connected with a formation of molecular aggregations ¹⁾; or there are two kinds of beryllium-atoms present, due to the internal fields of force resulting from the mutual interaction of the atoms in the crystalline state ²⁾. But in the latter case, the rather unusual assumption then must be made, that the atoms in these different states cannot be transformed into each other.

In our opinion, both suppositions seem to be rather hazardous ones in the case of so simply built and stable atoms as those of beryllium, which only possess 4 electrons of a low energy-level in two successive orbits.

Finally it can be remarked, that it were equally well possible that the occurrence of the β -spectrum is a phenomenon quite apart from the manifestation of the retardation-phenomena described. Considering all

¹⁾ In this respect attention may be drawn to the interesting case of the complex compounds: Cu_2HgI_4 and Ag_2HgI_4 studied by KETELAAR (*Thesis*, Amsterdam, (1933), 43), where the pseudo-components were identified by this author with two different structure-types and the two occurring modifications were considered as mixed crystals containing the two types in different proportions.

²⁾ A greater number of different states of the atoms in the solid phase can be expected for this reason, than in the gaseous state. According to these view, energy-differences between these states occasionally may appear, according to SMITS, varying from as little as 1 calorie or less, — as in the case of the rare earth-metals, — up to several thousands of calories.

facts, we can say that, although the hypothesis of an internal equilibrium between two constituents appears an alluring one; the true nature of these still remains unknown.

*Groningen, Laboratory for Inorganic and Physical Chemistry
of the University.*

Physics. — *On anomalies of terrestrial magnetism.* By S. W. VISSER.

(Communicated at the meeting of December 16, 1933.)

1. BAUER (1), NIPPOLDT (2), BARTELS (3), ANGENHEISTER (4) have expressed objections to GAUSS's method of spherical harmonics of the field of terrestrial magnetism.

Therefore a new research into the normal field appears to be justified. We have based our investigation wholly upon the isomagnetic maps of the Hydrographic Office, Navy Department U.S.A., Washington 1930. As to the north-polar cap we have also consulted FISK's maps (5). This suffices for our purpose being a first orientation.

We shall derive in the first place some properties of a "normal field" based upon two adiametrical poles, presuming them to have equal strength.

2. We call the straight line between the poles the "magnetic axis". The great circle perpendicular to this axis will be called "magnetic equator". Furthermore we call the small circles through the magnetic poles "magnetic meridians". The great circle through the poles will be the zero-meridian of our system.

The magnetic equator and the zero-meridian have been taken as axes of coordinates. The origin is one of the two points where these great circles intersect. It is situated in the centre of the Pacific Ocean at 146.6° W.L. in the immediate neighbourhood of the geographic equator. The angle between the magnetic and geographical equatorial planes amounts to 15 degrees.

The distance of the poles to the origin is 78.0° . Each magnetic meridian has been divided between the equator and the poles into 78 equal parts and curves have been drawn through corresponding points. These curves may be suitably called "parallels" and the 78 equal parts "degrees". Points on the sphere will be located by means of the meridians and parallels of this system.

3. We may presume now the following properties of our "normal field".

1. The inclination is zero along the magnetic equator and reaches a maximum value at the poles.

2. The horizontal magnetic force is directed along the magnetic meridian; it has a maximum on the equator and is zero at the poles.

The zero-meridian and the magnetic equator divide the sphere in four sectors which are in magnetical respects symmetrical with regard to these great circles.

The exact shapes of magnetic meridians intersecting the magnetic equator at equal distances of 22.5° have been calculated. Parallels were drawn at distances of 5 degrees. Declination D , horizontal intensity H and inclination I have been read from the U.S. Navy maps on each intersection of meridians and parallels. As to the declination the figures have to be reduced to the magnetic meridians. The angle between the horizontal force and the magnetic meridian will be called the deviation d .

The following components of the magnetic force have been calculated:

10. $H \sin d$, the east component, i.e. the component perpendicular to the magnetic meridian,

20. $H \tan I$, the vertical component,

30. $H \cos d$, the north component, i.e. the component in the direction of the magnetic meridian.

4. The east-component. The normal east component must be zero everywhere. However, we see that this component is zero only along well marked lines, whereas in the regions between easterly or westerly components remain, obviously suggesting the presence of important disturbances of terrestrial magnetism (Map 1)¹). To localize and identify these anomalies unambiguously we have to study the other components.

The vertical component. We presume the vertical component to be constant along each parallel, the examination of the average values not revealing deviations from this rule. It is not allowed to take the average of each set of symmetrical points as stated above, because they may be strongly disturbed. By carefully shifting the figures we may obtain a first approximation of the normal vertical field.

By subtracting the normal values from those observed the disturbing field is obtained.

So we find a number of well defined fields of south and north magnetism (Map 2). When comparing map 2 with map 1 we see that the east components wholly concord with the residual vertical field.

The north-component. This component is not constant along the magnetic parallels, reaching a maximum on the zero meridian, a minimum on the 180° meridian. The observations evidently show this behaviour and it is possible by adopting a similar smoothing process as above to derive reliable values for the normal field.

Here again we find by calculating the residual components evident concordance with the other components (See map 3).

¹) The maps 1, 2 and 3 contain also the magnetic equator and the zero-meridian.

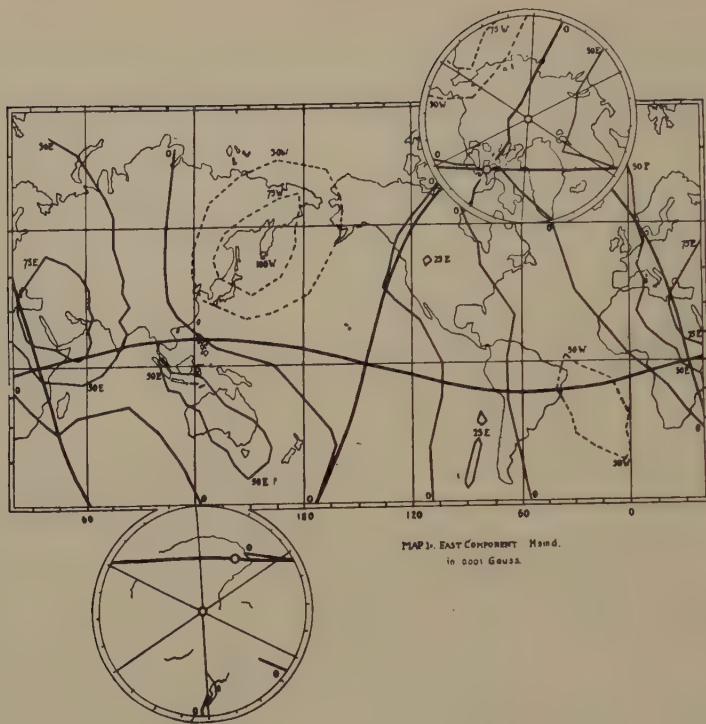


Fig. 1

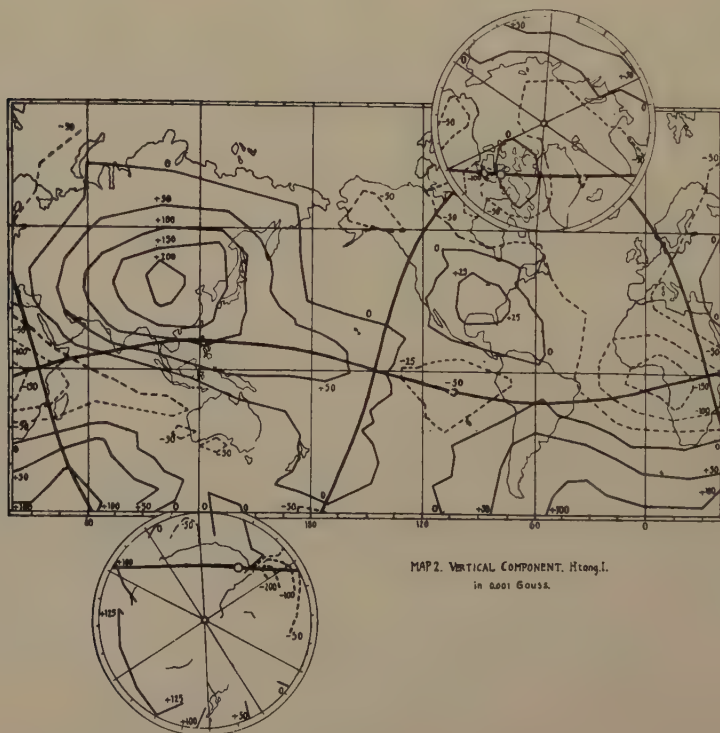


Fig. 2

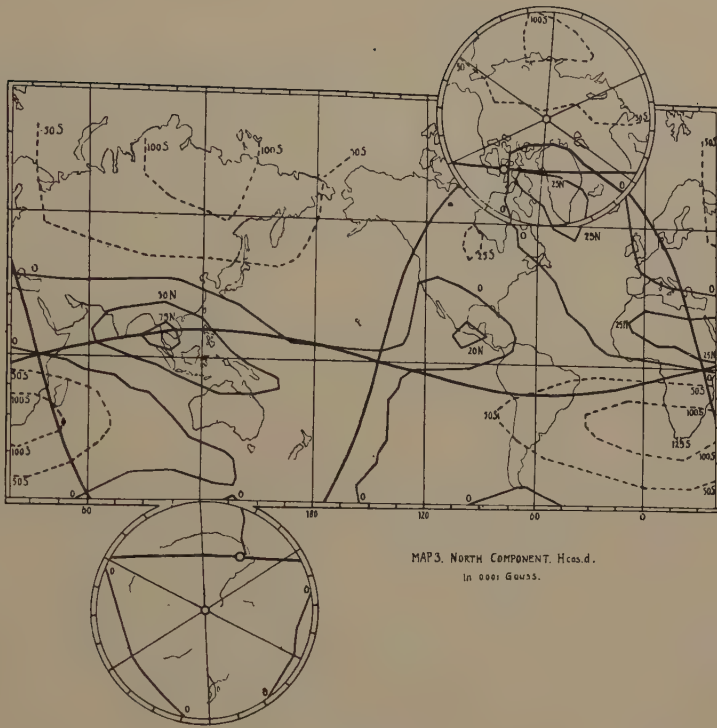


Fig. 3

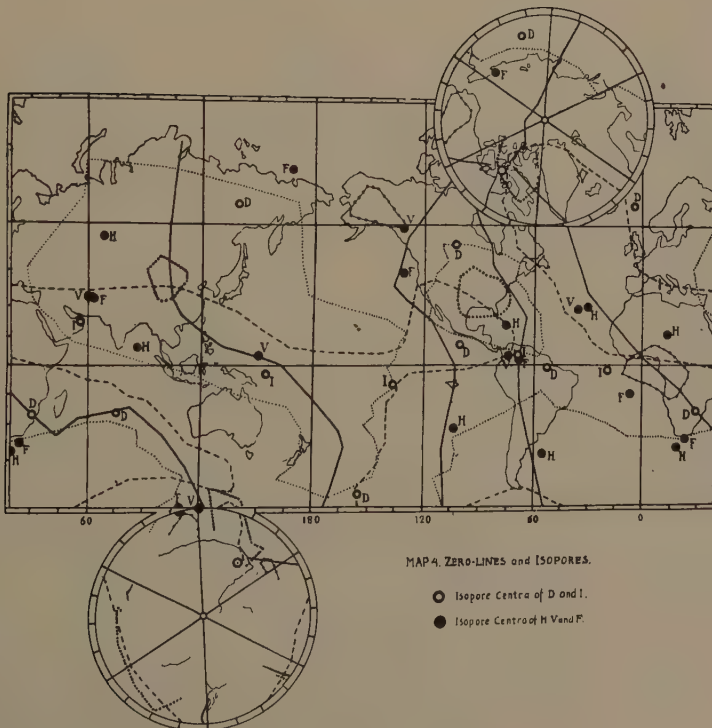


Fig. 4

Both the east and the north components must be zero just above the centre of an anomaly. Moreover the zero-lines must cross the poles. To show this map 4 has been drawn which contains the systems of zero-lines and the zones of disturbance of the vertical force. Indeed these conditions are remarkably well fulfilled. Whereas the concordance is very close in the well known parts of the world it is less in the polar regions. Yet the course of the zero-lines is by no means disappointing.

5. We may now understand a number of features of the terrestrial field. We point f.i. to the maximum of horizontal intensity in the Malay Archipelago and Further India. It is due to the two following factors:

1^o. the magnetic equator with its maximum values of horizontal intensity is crossing these regions,

2^o. the horizontal force is still increased by the influence of the great southerly anomaly in East Asia.

The map of the vertical residual field reveals a most remarkable symmetry with respect to the origin. The south-anomaly in East Asia extending over the S. W. Pacific finds a true reflection in the Antarctic south-anomaly of the southern Atlantic Ocean with the field in the United States. In the immediate neighbourhood of the intersection of the 180° meridian and the equator the very strong north field of western tropical Africa is situated. Though the polar regions are only poorly known we may remark that the symmetry is here present too: strong positive fields in the neighbourhood of the magnetic poles are to both sides accompanied by negative anomalies along the zero meridian. We find corresponding symmetries in the other components.

We see a contrast between the two hemispheres: the continental field of East Asia corresponds with the oceanic field in the southern Atlantic, whereas the oceanic field of the S. W. Pacific corresponds with the continental field of the United States.

6. The late Dr. G. P. NIJHOFF has detected an interesting relation between the magnetic centra of the residual field and the centra of FISK's isopores (6). The centra of maximum positive or negative secular variation derived from FISK's maps have been plotted on fig. 4. One glance reveals that they all avoid the maxima of the residual field, but that they prefer the neighbourhood of the zero-lines. They are situated around the Central-Asia and SW-Pacific field and around the West-Africa centre. Especially they accumulate near the zero-lines of tropical South America. We see two strong centra of isopores south of Australia again where a number of zero-lines are meeting.

These features cannot be accidental. They show a close correlation between the two phenomena. The zero-lines will be formed under the mutual influence of neighbouring fields and we may readily presume that here the secular variation is acting strongly.

7. CLAY (7) has recently discussed a remarkable earth-magnetic effect on the ultra-radiation. He has based his magnetic coordinates on the reduced magnetic north pole, whereas the effect found without doubt will depend upon the true poles and their magnetic field. The distance from the true pole to the reduced pole exceeding 11° is by no means negligible.

When now reducing his magnetic coordinates to those developed in this paper we may draw indeed a curve that more satisfactorily suits to the facts (fig. 5)¹⁾.

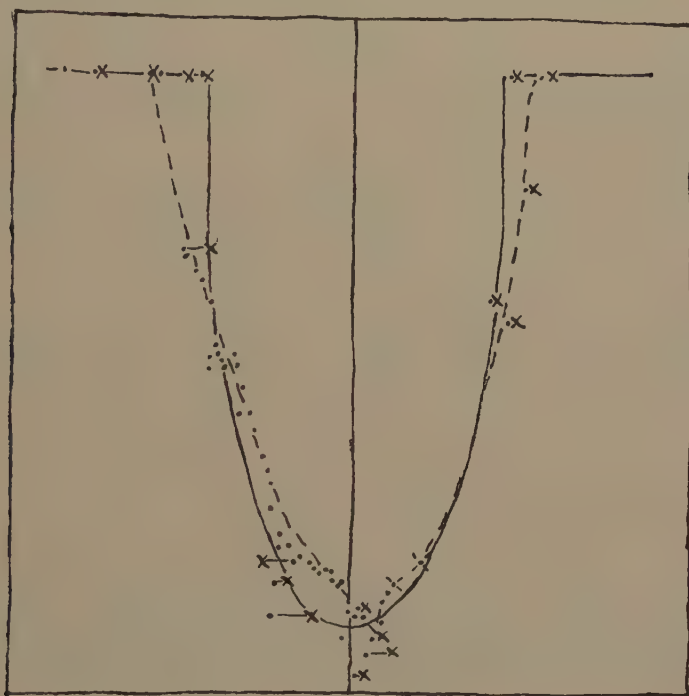


Fig. 5

Here we find also confirmed our opinion that referring the phenomena of terrestrial magnetism to the true poles shows obvious advantages.

¹⁾ We could not correct all observations, because we wanted BERLAGE's data. Corrected values have been indicated by crosses and connected by horizontal lines to the original points. CLAY's curve is represented by a broken line.

LITERATURE.

1. L. A. BAUER, Terr. Mag. **13**, 1908, p. 70.
2. A. NIPPOLDT, Einführung in die Geophysik, 1929, p. 57, 65.
3. J. BARTELS, Handb. d. Experim. Physik, Vol. **25**, Part I, 1928, p. 604.
4. G. ANGENHEISTER, Handwörterb. d. Naturw. 1932, p. 667.
5. H. W. FISK, Trans. Am. Geoph. Un. 1931, p. 134—139.
6. H. W. FISK, Dep. Terr. Mag. Carnegie Inst. Rep. and Comm. Stockholm Assembly, 1930, p. 23—30.
7. J. CLAY, Proc. Amsterdam, Vol. **35**, 1932, p. 1283.

Mathematics. — *Die Differentialinvarianten eines Systems von n relativen kovarianten Vektoren in R_n .* Von G. F. C. GRISS. (Communicated bij Prof. R. WEITZENBÖCK).

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

Es sei die Gruppe der eindeutigen (genügend oft) stetig differentierbaren Transformationen

$$x_i = f_i = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

gegeben mit der Transformationsdeterminante

$$\Delta = |e_k^i|, \quad \text{mit} \quad e_k^i = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}.$$

Für einen Tensor gelten bekanntlich die Transformationsformeln

$$\bar{a}_{\alpha\beta\dots}^{\pi\rho\dots} = a_{\mu\nu\dots}^{\varphi\chi\dots} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} \dots \bar{e}_{\varphi}^{\pi} \bar{e}_{\chi}^{\rho} \dots$$

und für eine Tensordichte

$$\bar{a}_{\alpha\beta\dots}^{\pi\rho\dots} = a_{\mu\nu\dots}^{\varphi\chi\dots} \Delta e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} \dots \bar{e}_{\varphi}^{\pi} \bar{e}_{\chi}^{\rho} \dots$$

Es liegt nahe die Tensordichte einen relativen Tensor vom Gewicht eins zu nennen und im allgemeinen *relative* ¹⁾ *Tensoren* vom Gewicht r zu definieren vermöge folgender Transformationsgleichungen

$$\bar{a}_{\alpha\beta\dots}^{\pi\rho\dots} = a_{\mu\nu\dots}^{\varphi\chi\dots} \Delta^r e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} \dots \bar{e}_{\varphi}^{\pi} \bar{e}_{\chi}^{\rho} \dots$$

Wir betrachten jetzt ein System von n linear-unabhängigen relativen kovarianten Vektoren

$${}_h \bar{a}_{\alpha} = {}_h a_{\mu} e_{\alpha}^{\mu} \Delta^{r_h}. \quad (h = 1, \dots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die vorderen Indizes werden immer die Anzahl der Vektoren und Tensoren angeben.

Das Gewicht der Invariante

$$a = |{}_h a_{\alpha}| \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist $1 + \sum r_h$. Für $1 + \sum r_h \neq 0$ ersetze man (durch Multiplikation mit

¹⁾ Vgl. z.B. THOMAS and MICHAL, *Annals of Mathematics*, vol. 28 (1927), pag. 643 oder auch E. BORTOLOTTI, *Rend. di Palermo* 56 (1932), pag. 11.

einer geeigneten Potenz von a) die relativen Vektoren durch n absolute, deren Differentialinvarianten man in bekannter Weise bestimmen kann²⁾.

Wir brauchen also nur den Fall

$$\Sigma r_h = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zu untersuchen, in welchem a eine absolute Invariante ist, und setzen ausdrücklich $r_h \neq 0$ voraus.

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten erster Ordnung differenziere man (1):

$$\frac{\partial {}_h \bar{a}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} = \frac{\partial {}_h a_{\mu}}{\partial x_\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \Delta^{r_h} + {}_h a_\mu e_{\alpha\beta}^\mu \Delta^{r_h} + r_h {}_h a_\mu e_\alpha^\mu \Delta^{r_h-1} \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\beta}. \quad (4)$$

(Zur Abkürzung setzen wir $e_{\alpha\beta}^\mu = \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}$, u.s.w.)

Vertauschung von α und β und Subtraktion ergibt

$${}_h \bar{p}_{\alpha\beta} = {}_h p_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \Delta^{r_h} + \frac{r_h}{\Delta} \left({}_h \bar{a}_\alpha \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\beta} - {}_h \bar{a}_\beta \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha} \right), \quad . \quad . \quad (5)$$

wo ${}_h p_{\alpha\beta}$ die Rotationen

$${}_h p_{\alpha\beta} = \frac{\partial {}_h a_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial {}_h a_\beta}{\partial x_\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

sind, welche hier natürlich der Tensoreigenschaft entbehren.

Nach Dividierung durch r_h multiplizieren wir (5) mit ${}_h \bar{a}^\lambda$ (dem durch \bar{a} dividierten Minor von ${}_h \bar{a}_\lambda$) und summieren über h (auch hier unterdrücken wir das Summenzeichen):

$$\frac{{}_h \bar{p}_{\alpha\beta} {}_h \bar{a}^\lambda}{r_h} = \frac{{}_h p_{\mu\nu} {}_h \bar{a}^\lambda}{r_h} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \Delta^{r_h} + \frac{1}{\Delta} \left(\delta_\alpha^\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\beta} - \delta_\beta^\lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha} \right), \quad . \quad (7)$$

Verjüngung nach λ und β ergibt

$$\frac{{}_h \bar{p}_{\alpha\beta} {}_h \bar{a}^\beta}{r_h} = \frac{{}_h p_{\mu\nu} {}_h \bar{a}^\beta}{r_h} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \Delta^{r_h} + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha} - n \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha} \right), \quad . \quad . \quad (8)$$

oder

$$\frac{{}_h \bar{p}_{\alpha\beta} {}_h \bar{a}^\beta}{r_h} = \frac{{}_h p_{\mu\nu} {}_h a^\nu}{r_h} e_\alpha^\mu + \frac{1-n}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

²⁾ Vgl. z.B. G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren, Kap. I (Groningen, 1925).

Wir lösen

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha} = -\bar{s}_\alpha + s_{\mu} e_{\alpha}^{\mu} (10)$$

mit

$$s_{\mu} = \frac{{}_h p_{\mu\nu} {}_h a^{\nu}}{r_h (n-1)} (11)$$

Die Werte für $\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha}$ substituieren wir in (4):

$$\frac{\partial {}_h \bar{a}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} + r_h {}_h \bar{a}_\alpha \bar{s}_\beta = \left(\frac{\partial {}_h a_\mu}{\partial x_\nu} + r_h {}_h a_\mu s_\nu \right) e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} \Delta^r_h + {}_h a_\mu e_{\alpha\beta}^{\mu} \Delta^r_h . (12)$$

Multiplikation mit ${}_h a^\lambda$ und Addition ergibt

$$\left(\frac{\partial {}_h \bar{a}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} + r_h {}_h \bar{a}_\alpha \bar{s}_\beta \right) {}_h a^\lambda = \left(\frac{\partial {}_h a_\mu}{\partial x_\nu} + r_h {}_h a_\mu s_\nu \right) {}_h a^\lambda e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} \Delta^r_h + e_{\alpha\beta}^{\lambda} \Delta^r_h . (13)$$

also

$$e_{\alpha\beta}^{\lambda} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} e_{\gamma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} (14)$$

mit

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial {}_h a_\mu}{\partial x_\nu} {}_h a^\lambda + r_h {}_h a_\mu {}_h a^\lambda s_\nu (15)$$

Hieraus folgt unmittelbar der

Reduktionssatz³⁾: Die Differentialinvarianten erster Ordnung der relativen Vektoren ${}_h a_\alpha$ sind algebraische Invarianten von ${}_h a_\alpha$,

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} (16)$$

und der mit (15) gebildeten kovarianten Ableitungen von ${}_h a_\alpha$.

Dieser Reduktionssatz lässt sich natürlich noch sehr vereinfachen.

Die kovarianten Ableitungen (vom Gewicht r_h) des relativen Vektors ${}_h a_\alpha$ sind, wie man leicht bestätigt,

$${}_h a_{\mu(\nu)} = \frac{\partial {}_h a_\mu}{\partial x_\nu} - {}_h a_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - r_h {}_h a_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} (17)$$

³⁾ R. WEITZENBÖCK, Invariantentheorie, XIII. Abschnitt, § 21 (Groningen, 1923).

Also vermöge (15)

$$\begin{aligned}
 {}_h a_{\mu(v)} &= \frac{\partial {}_h a_{\mu}}{\partial x_v} - {}_h a_{\lambda} \frac{\partial {}_k a_{\mu}}{\partial x_v} {}_k a^{\lambda} - {}_h a_{\lambda} r_k {}_k a_{\mu} {}_k a^{\lambda} s_v - \\
 &\quad - r_h {}_h a_{\mu} \frac{\partial {}_k a_{\lambda}}{\partial x_v} {}_k a^{\lambda} - r_h {}_h a_{\mu} r_k {}_k a_{\lambda} {}_k a^{\lambda} s_v = \\
 &= \frac{\partial {}_h a_{\mu}}{\partial x_v} - \frac{\partial {}_h a_{\mu}}{\partial x_v} - r_h {}_h a_{\mu} s_v - r_h {}_h a_{\mu} \frac{\partial {}_k a_{\lambda}}{\partial x_v} {}_k a^{\lambda} - r_h {}_h a_{\mu} \sum r_k s_v = \\
 &= -r_h {}_h a_{\mu} s_v (1 + \sum r_k) - r_h {}_h a_{\mu} \frac{\partial {}_k a_{\lambda}}{\partial x_v} {}_k a^{\lambda} = -r_h {}_h a_{\mu} \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x_v}.
 \end{aligned}$$

Wir können ${}_h a_{\mu(v)}$ also durch den kovarianten Vektor

$$v_v = \frac{\partial a}{\partial x_v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

ersetzen.

Ferner ersetzen wir $S_{\mu\nu}^{\lambda}$ durch

$${}_l q_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^{\lambda} {}_l a_{\lambda} = {}_l p_{\mu\nu} + r_l {}_l a_{\mu} s_{\nu} - r_l {}_l a_{\nu} s_{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Diese n relativen alternierenden Tensoren vertreten hier die n Rotationen bei absoluten Vektoren.

Da die zweiten Ableitungen $e_{\alpha\beta}^{\mu}$ aus (4) lösbar waren, führt ihre Elimination auf $n^3 - \frac{1}{2} n^2 (n+1) = \frac{1}{2} n^2 (n-1)$ Relationen; v_v und ${}_l q_{\mu\nu}$ haben also im allgemeinen $\frac{1}{2} n^2 (n-1)$ unabhängige Komponenten. Es bestehen also n Relationen zwischen diesen Tensoren, nämlich

$$\frac{{}_l a^{\mu} {}_l q_{\mu\nu}}{r_l} = \frac{{}_l a^{\mu} {}_l p_{\mu\nu}}{r_l} - n \frac{{}_k p_{\nu\sigma} {}_k a^{\sigma}}{(n-1) r_k} + \frac{{}_k p_{\nu\sigma} {}_k a^{\sigma}}{(n-1) r_k} = 0.$$

Der Reduktionssatz in der einfachsten Form lautet jetzt:

Ein (kleinstes) Adjunktionssystem erster Ordnung wird gebildet von den Tensoren ${}_l q_{\mu\nu}$ und v_v , wobei

$$\frac{{}_l a^{\mu} {}_l q_{\mu\nu}}{r_l} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Wir bemerken noch, dass Substitution der $e_{\alpha\beta}^{\lambda}$ in (10) auch auf den Vektor

$$s_{\mu} + \Gamma_{\rho\mu}^{\rho} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial x_{\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

führt.

Eine algebraische Basis erster Ordnung wird gebildet von

$$a, I_l = v_\nu i a^\nu \text{ und } I_{l h k} = \frac{i q_{\mu\nu} h a^{\mu} k a^\nu}{r_l} \dots \dots \dots (22)$$

mit den Relationen

$$\sum_l I_{l l k} = 0. \dots \dots \dots (23)$$

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten zweiter Ordnung hat man folgenden Reduktionssatz ⁴⁾:

Ein Adjunktionssystem zweiter Ordnung wird gebildet von den kovarianten Ableitungen von $S_{\mu\nu}^h$, v_ν und vom Krümmungstensor $R_{\nu\alpha\beta}^i$.

Wir werden jetzt zeigen, dass das System $S_{\mu\nu(\sigma)}^h$, $v_{\nu(\sigma)}$ und $R_{\nu\alpha\beta}^i$ sich für $n > 2$ durch $i q_{\mu\nu(\sigma)}$ und $v_{\nu(\sigma)}$ ersetzen lässt. Vermöge (19) ist $S_{\mu\nu(\sigma)}^h$ unmittelbar durch $i q_{\mu\nu(\sigma)}$ ausdrückbar.

Der Krümmungstensor vereinfacht sich nach ziemlich umständlicher Rechnung auf

$$R_{\nu\alpha\beta}^i = - r_k k a_\nu k a^i s_{\alpha\beta} \dots \dots \dots (24)$$

mit

$$s_{\alpha\beta} = \frac{\partial s_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial s_\beta}{\partial x_\alpha} \dots \dots \dots (25)$$

Dieser (absolute) alternierende Tensor findet man aus (10), wenn man nach \bar{x}_β differenziert, α und β vertauscht und substrahiert.

Es liegt nahe ihn zu vergleichen mit

$$t_{\mu\nu} = \frac{i a^\sigma i q_{\mu\nu(\sigma)}}{r_l} \dots \dots \dots (26)$$

Dazu berechnen wir von $t_{\mu\nu}$ aber nur die Termen zweiter Ordnung.

$$i q_{\mu\nu(\sigma)} = \frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + r_l i a_\mu \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\sigma} - r_l i a_\nu \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\sigma} + \dots \dots \dots (27)$$

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} &= \frac{i a^\sigma}{r_l} \frac{\partial i p_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\nu} + \dots = \\ &= - \frac{i a^\sigma}{r_l} \frac{\partial i p_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{i a^\sigma}{r_l} \frac{\partial i p_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} - s_{\mu\nu} + \dots = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{i p_{\nu\sigma} i a^\sigma}{r_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{i p_{\mu\sigma} i a^\sigma}{r_l} \right) - s_{\mu\nu} + \dots = \\ &= (n-1) \left(- \frac{\partial s_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\nu} \right) - s_{\mu\nu} + \dots = (n-2) s_{\mu\nu} + \dots \end{aligned}$$

⁴⁾ Vgl. 3).

Also

$$t_{\mu\nu} = (n-2) s_{\mu\nu} + \dots \quad (28)$$

Hiermit ist gezeigt worden, dass ${}_{\mathcal{I}}q_{\mu\nu(\sigma)}$ und $v_{\nu(\sigma)}$ für $n > 2$ ein Adjunktionssystem zweiter Ordnung bilden. Wir untersuchen jetzt noch die Abhängigkeit der Komponenten dieser Tensoren. Die Elimination von $e_{\alpha\beta}^\lambda$ und $e_{\alpha\beta\gamma}^\lambda$ aus den nach \bar{x}_γ differenzierten Gleichungen (4) muss im allgemeinen $\frac{1}{2} n^3 (n+1) - \frac{1}{6} n^2 (n+1) (n+2) = \frac{1}{3} n^2 (n+1) (n-1)$ unabhängige Relationen liefern. Dies ist also die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Adjunktionssystems. Statt $v_{\mu(\nu)}$ nehmen wir den symmetrischen Tensor $v_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (v_{\mu(\nu)} + v_{\nu(\mu)})$ mit $\frac{1}{2} n (n+1)$ Komponenten. Die ${}_{\mathcal{I}}q_{\mu\nu(\sigma)}$ müssen also noch $\frac{1}{3} n^2 (n+1) (n-1) - \frac{1}{2} n (n+1)$ unabhängige Komponenten haben. Also muss es zwischen ihnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n^3 (n-1) - \left\{ \frac{1}{3} n^2 (n+1) (n-1) + \frac{1}{2} n (n+1) \right\} = \\ = \frac{1}{6} n^2 (n-1) (n-2) + \frac{1}{2} n (n+1) \end{aligned}$$

Relationen geben. Man findet sie mittels kovarianter Differentiation von (20) und zyklischer Vertauschung und Addition von (27). Ersteres ergibt

$$Q_{\nu\lambda} = \frac{{}_l a^\mu {}_{\mathcal{I}}q_{\mu\nu}^{(\lambda)}}{r_l} + \dots = 0,$$

also $\frac{1}{2} n (n+1)$ Relationen, letzteres

$$\sum_{zykl.} {}_{\mathcal{I}}q_{\mu\nu(\sigma)} = - \sum_{zykl.} r_l {}_l a_\mu s_{\nu\sigma} + \dots,$$

also $\frac{1}{6} n^2 (n-1) (n-2)$ Relationen.

Für $n=2$ ist $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ symmetrisch, so dass der Tensor $S_{\mu\nu}^\lambda$ verschwindet, also auch ${}_{\mathcal{I}}q_{\mu\nu}$. $s_{\alpha\beta}$ ist eine relative Invariante zweiter Ordnung vom Gewicht eins.

Ein kleinstes Adjunktionssystem zweiter Ordnung wird für $n=2$ also gebildet von $s_{\alpha\beta}$ und den kovarianten Ableitungen von v_ν .

Wenn a im besondern unabhängig von den Koordinaten x_i ist, gibt es also nur eine relative Invariante zweiter Ordnung. Man findet dann 2 absolute Invarianten dritter Ordnung⁵⁾.

⁵⁾ G. F. C. GRISS, Differentialinvarianten eines kovarianten Tensors 4. Stufe im binären Gebiet; erscheint demnächst in der *Compositio Mathematica*.

Mathematics. — *Über FEJÉRS Summierung der FOURIERSchen Reihe.*
 Von F. DE KOK. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

Es sei

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

die FOURIERSche Reihe einer über E ($0 \leq x \leq 2\pi$) summierbaren Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π .

Wir setzen:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n s_k(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) = g(x, t)$$

und

$$\int_0^t g(x, t) dt = \psi(x, t).$$

Nun ist:

$$\varrho_n(x) = \frac{t_n(x)}{n+1} - f(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(x, t) \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{1}{2} t} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

H. LEBESGUE hat folgenden Satz bewiesen¹⁾:

Wenn in einem Punkte x_0

$$\int_0^t |g(x_0, t)| dt = o(t)$$

so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x_0) = 0$$

¹⁾ Ann. de Toulouse (3) 1, pag. 90.

H. HAHN ¹⁾ hat an einem Beispiel gezeigt dass in diesem Satze die geringere Voraussetzung

$$\int_0^t g(x_0, t) dt = o(t)$$

nicht hinreicht.

Wir beweisen jetzt folgende Sätze:

Satz I. Ist x_0 eine Zahl derart dass die Funktion $\frac{\psi(x_0, t)}{t}$ summierbar ist über $(0, \pi)$ und setzen wir

$$I^{(n)}(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(x_0, t)}{t} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dann gilt:

$$\varrho_n(x_0) - \left\{ 2 \frac{I^{(0)} + I^{(1)} + \dots + I^{(n)}}{n+1} - I^{(n)} \right\} \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Satz II. Wenn in einem Punkte x_0

$$\int_0^t g(x_0, t) dt = o(t) \quad \text{und} \quad \int_0^t |g(x_0, t)| dt = O(t)$$

so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x_0) = 0.$$

Beweis Satz I.

$$\begin{aligned} \varrho_n(x_0) &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{1}{2} t} d\psi(x_0, t) = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \psi(x_0, \pi) \sin^2 \frac{n+1}{2} \pi - \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(x_0, t) d \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{1}{2} t} = \\ &= o(1) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(x_0, t) \frac{\sin(n+1)t}{2 \sin^2 \frac{1}{2} t} dt + \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(x_0, t) \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{1}{2} t} \cotg \frac{1}{2} t dt = \\ &= o(1) - I_1^{(n)} + I_2^{(n)}. \end{aligned}$$

¹⁾ Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Ver. Band 25, pag. 359.

$$\begin{aligned}
I_1^{(n)} - I^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(x_0, t)}{t} \left\{ \frac{t \sin(n+1)t}{2 \sin^2 \frac{1}{2} t} - 2 \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right\} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(x_0, t)}{t} \left\{ \frac{t \sin(n+\frac{1}{2})t \cdot \cos \frac{1}{2} t + t \cos(n+\frac{1}{2})t \cdot \sin \frac{1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{1}{2} t} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t} \right\} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(x_0, t)}{t} \left\{ \frac{t \cos \frac{1}{2} t - 2 \sin \frac{1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{1}{2} t} \right\} \sin(n+\frac{1}{2})t dt + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(x_0, t)}{t} \frac{t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \cos(n+\frac{1}{2})t dt \\
&= O(1) \text{ für } n \rightarrow \infty, \text{ denn } \frac{t \cos \frac{1}{2} t - 2 \sin \frac{1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{1}{2} t} \text{ ist beschränkt für } 0 < t < \pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I^{(0)} + I^{(1)} + \dots + I^{(n)}}{n+1} &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(x_0, t)}{t} \frac{1}{\sin \frac{1}{2} t} \sum_{k=0}^n \sin(k+\frac{1}{2})t \cdot dt = \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(x_0, t)}{t} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{1}{2} t} dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| 2 \frac{I^{(0)} + I^{(1)} + \dots + I^{(n)}}{n+1} - I_2^{(n)} \right| &= \\
&= \left| \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\psi(x_0, t)}{t} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{1}{2} t} \{ 2 - t \cotg \frac{1}{2} t \} dt \right| \equiv \\
&\equiv \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\psi(x_0, t)}{t} \frac{2 \sin \frac{1}{2} t - t \cos \frac{1}{2} t}{\sin^3 \frac{1}{2} t} \right| dt = O(1) \text{ für } n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

denn

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} t - t \cos \frac{1}{2} t}{\sin^3 \frac{1}{2} t} \text{ ist beschränkt für } 0 < t < \pi.$$

Folgerung. Besitzt $I^{(n)}(x_0)$ einen Grenzwert, dann hat $\varrho_n(x_0)$ denselben Grenzwert.

Beweis Satz II. Wir betrachten ein Intervall $(0, \tau)$, $0 < \tau < \pi$, und wir zerlegen dieses Intervall durch endlich viele Punkte t_k , $k=0, 1, \dots, n$ derart dass

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n = \tau.$$

Nun ist :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\psi(x_0, t_{k+1}) - \psi(x_0, t_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(x_0, t) dt \right| \leq \int_0^{\tau} |g(x_0, t)| dt = O(\tau).$$

Also ist die totale Variation von $\psi(x_0, t)$ im Intervalle $(0, \tau)$ kleiner als $M\tau$, M konstant, $0 < \tau < \pi$.

Hieraus folgt wegen eines bekannten Kriteriums von W. H. YOUNG dass, $I^{(n)}(x_0) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.¹⁾

Aus Satz I folgt jetzt die Behauptung.

Bemerkung. Ohne die Voraussetzung

$$\int_0^t |g(x_0, t)| dt = O(t)$$

folgt noch

$$\varrho_n(x_0) + I^{(n)}(x_0) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Für solche Werte von x für welche $\int_0^t g(x, t) dt = o(t)$, ist also notwendig und hinreichend damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n(x) = 0$, dass $I^n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

¹⁾ Comptes Rendus, vol. CLXIII (1916), pp. 187, 975.

Chemistry. — *The Hydration Film of Cellulose in Cell-Walls.* By N. H. KOLKMEIJER and A. N. J. HEYN. (Communicated by Prof. ERNST COHEN.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

One of us (H.) recently published a communication in these Proceedings ¹⁾, describing the results of an X-ray investigation of the cellulose in the wall of young epidermis cells.

Endeavouring to improve on the X-ray photos previously obtained we made a number of powder photos of the same material viz. the cell wall of the epidermis, taken from the coleoptiles of *Avena sativa* and of *Muscari botryoides*. The samples were prepared as described l.c. We took the readings of line distances on two of our photos. From these we calculated for the lattice constants the values 7.92, 8.34 and 10.32 Å. MEYER and MARK ²⁾ give for these constants 7.9, 8.30 and 10.3 Å and for the angle between the *a*- and *b*-axes the value 84°.

Although the agreement shown is satisfactory, we give our values with due reserve, which is founded on an observation of one of us (K.) in collaboration with Mr. FAVEJEE ³⁾. These authors published a preliminary communication concerning the probable identity of most of the powder lines of starch with the lines of ice ⁴⁾. Their conclusion is that these lines probably originate in the ice structure of the "concrete" hydration film ⁵⁾, surrounding the micelles. Now we found lines on our photos, which may almost as well be ascribed to such an ice structure. All the lines, used in the calculation of the lattice constants, given above, belong to these possible ice lines. So it is doubtful, whether these lines originate in the cellulose structure and certainly we cannot be sure of the accuracy of their distances, as strong ice lines nearly coincide with them.

Below we tabulate the distances in mm. between the lines and the centre of the film, as well as the distances, measured at an ice film. As will be seen, all the ice lines are represented on the cellulose film although with less accuracy than in the case of starch, mentioned above. Only the fourth ice line shows a larger deviation from the corresponding cellulose line. But considering the chemical relation between cellulose and starch we are inclined to ascribe this deviation to the presence of strong cellulose lines corresponding with the characteristic starch lines at 13.9 and 14.7.

¹⁾ A. N. J. HEYN, These Proc. **36**, 560 (1933). See also *Protoplasma* **XX**, (1934).

²⁾ K. H. MEYER and H. MARK, *Z. physik. Chem. (B)* **2**, 115 (1929).

³⁾ N. H. KOLKMEIJER and J. C. L. FAVEJEE, *Nature* **132**, 602 (1933).

⁴⁾ A paper containing their arguments will appear shortly in the *Z. Krist.*

⁵⁾ H. R. KRUYT, *Colloids*, New York 1930, p. 180.

The circumstance, that the deviations are larger here than in the case of starch, is no doubt partly due to the faintness of the lines, but on the

Cellulose	Ice	Cellulose	Ice
7.4	—	16.8	17.0
10.3	10.9	19.9	19.1
11.5	11.7	20.6	20.8
12.8	12.4	21.9	22.6
14.6	16.0	24.2	24.0

other hand we must not forget, that in their paper cited above KOLKMEIJER and FAVEJEE made it clear that such deviations may be expected for three reasons viz.

- a. the strong electric field of the micelle will give rise to stresses, which seriously disturb the normal lattice of the ice forming the concrete film;
- b. on the outside of the concrete hydration film a gradual transition to the non-crystalline "diffuse" film takes place, which in its turn passes into the unordered dispersing medium;
- c. strong or faint cellulose lines might nearly coincide with ice lines so that the readings of the last ones become more or less erroneous.

Considering these facts, we would conclude from our observations that in the case of cellulose as well as in that of starch the concrete hydration film shows the structure of — more or less deformed — ordinary ice.

VAN 'T HOFF-Laboratory.

Utrecht.

Geology. — *Humusortstein und Bleichsand als Bildungen entgegengesetzter Klimate.* Von W. BEIJERINCK. (Communicated by Prof. H. A. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

Schon über ein halbes Jahrhundert hat man der Auffassung gehuldigt, dass Bleichsand und Humusortstein, wie sie aus zahlreichen Gebieten der Erde gut bekannt sind, ihrer Bildung nach zusammenhängende synchrone Erscheinungen seien. Die Bleichsandschicht im Profil stelle eine ausgewaschene Bodenschicht dar, während Humate in Gelzustand darunter

ausgeflockt und angehäuft worden seien. Ein stichhaltiger Beweis für diese Auffassung wurde, soweit mir bekannt, nie geliefert, wenn auch die Erscheinungen plausibel gemacht werden konnten.

Während der letzten Jahre ist mir manches Bedenken gegen diese so geläufige Auffassung gekommen. Ich werde die m.E. dazu führenden Beobachtungen und die daran geknüpften Betrachtungen hier kurz zusammenfassen.

1. Im Sanddiluvium der Niederlande wurden mehrfach Bleichsandschichten von mir beobachtet, welche unmittelbar auf dem hellgelben, sog. altglazialen Decksande ruhten, ohne jegliche Spur einer Humusortsteinbank darunter. Auch in Flugsandgebieten (Landdünen) wurden diese Bleichsandschichten in jüngeren Sedimentationen postglazialen Alters aufgefunden ohne eine Spur von Bankbildung oder nur Braunfärbung des Liegenden. In einzelnen Fällen sah ich vier (Elsloo, Spier) und zwei (Spier, Ruinen) Bleichsandschichten übereinander, ebenfalls ohne Braunfärbung oder Bankbildung im Untergrunde. In derselben Weise ruhen Bleichsandschichten direkt auf Geschiebelehm (Mitt. d. Staatsforstverwaltung). Daraus ergibt sich also: dasz Bleichsandschichten sich ausbilden können, ohne dasz darunter eine Humusortsteinschicht entsteht.

Öfters sah ich auch ein allmähliches Dünnerwerden der Ortsteinbänke bis zum Verschwinden, während die Bleichsandschicht genau dieselbe Dicke behielt und der Untergrund (gelber Decksand) genau denselben Habitus zeigte (Fig. 1). Auch stellte ich den Fall fest (Fig. 2) wo bei A und A' m.E. die Abtragungsfläche a—a hervortrat.

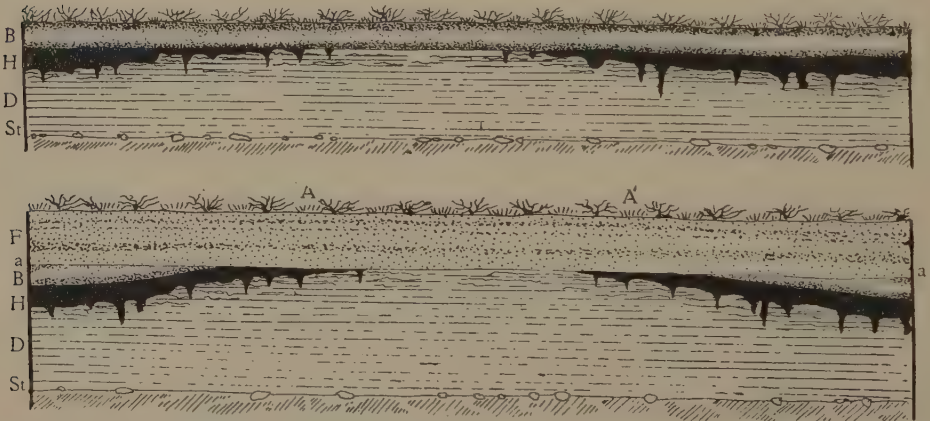


Fig. 1 (oben) und Fig. 2 (unten). B Bleichsand; H Humusortstein; D Decksand; St. Steinsohle; F Dünensand; a—aa Abtragungsfläche.

2. Wo ich in den zahlreichen Heideprofilen in der Provinz Drente Steinzeitgeräte in situ beobachten konnte, während eine braune Humusortsteinschicht vorhanden war, stellte ich fest:

- a. dasz sich die mesolithischen und neolithischen Artefakte, in ungestörten Ablagerungen stets oberhalb der Bank befanden ;
- b. dasz die paläolithischen Feuerstätten und Silices des Aurignac- und Moustier-Typus bis jetzt immer darunter auftraten (Lit. 6 u. 4) ;
- c. dasz die mesolithischen Artefakte vom Tardenois- und Azilien-Typus auf die Bleichsandschicht, direkt über der Bank beschränkt blieben. Wenn man nicht an eine Zufälligkeit glauben will, musz dies somit eine Andeutung dafür sein, dasz es sich hier handelt um Formationen ganz verschiedener Epochen.

3. Die Humusortsteinbänke folgen nicht immer dem gegenwärtigen Bodenrelief der Landschaft, sondern stören sich bisweilen nur wenig daran. Von den jüngeren Erosionstälern der Bäche werden sie unterbrochen (Cf. P. E. MÜLLER, 1924, Lit. 10, S. 222—223). Man findet sie ferner nicht nur unter postglazialen Dünenbildungen (auch längs der Meeresküste Hollands) und unter Bronzezeittumuli, ja sogar unter einem Megalithgrab (EMEIS, 1876) ungestört in der Tiefe sich hinziehend, sondern sogar auf 14 m Tiefe unter Watt- und Marschablagerungen (SCHÜTTE, 1931) und von 2 m Moorablagerungen überlagert und dann gut erhalten (S. O.-Drente). Ferner findet man im europäischen Gebiete Humusort-Ablagerungen auf felsigem, kiesigem, tonigem und kalkigem Untergrund in zahlreichen Mittel- und Hochgebirgen. Nie konnte ich aber eine Humusortsteinbank mit oben und unten postglazialen Flugsande feststellen, während dies öfters beobachtet wurde bei den Bleichsandschichten. Dagegen findet man oft feingeschichtete Decksande als Liegendes der Bänke.

Aus diesen Beobachtungen sehen wir, dasz wohl sehr alte Humusortsteinbildungen bekannt sind, dasz aber in unserm Sanddiluviumpfgebiet solche Bänke, bei denen bestimmbare postglaziale Ablagerungen das Liegende bilden, — nie mit Sicherheit festgestellt werden konnten.

Wohl gibt es in Flugsandgebieten Umlagerungen der älteren Bänke, wodurch sekundäre Fuchserdeschichten entstehen, während auch beim Durchlöchern oder Zerbrechen der Bänke wahrscheinlich Umlagerungen der Humine stattfinden nach Zerfrierung und Auftauen des Bodens. Diesbezügliche Versuche sind unter gütigster Mitwirkung der niederländischen Staatsforstverwaltung im Gange.

4. Pollenanalytische Untersuchungen der Heideprofile mit Bleichsand- und Ortsteinbildung, seit 1930 von mir angestellt (Lit. 2, 3, 4, 5, 6), ergaben :

- a. dasz in gleichartigen Profilen, an verschiedenen Stellen der Landschaft, die Pollen- und Sporenverbreitung in den aufeinanderfolgenden Schichten ziemlich gleiche Erscheinungen zeigte, sowohl quantitativ wie qualitativ ;
- b. dasz sich in der Bleichsandschicht öfters Pollenspektren zeigten

mit parallelem Verlauf, wie in den postglazialen Moorablagerungen des Gebietes (Blytt—Sernander-Schema) ;

c. dasz in der Humusortsteinabteilung diejenigen Pollenarten fehlen, welche auf ein milderes Klima hätten hindeuten können, während aufgefunden wurden : Moossporen, Selaginella-Mikrosporen, Moosblattfetzen, bisweilen auch Tetraden, Sphagnumsporen und Betula-Pollenkörner. Dies deutet in die Richtung eines arktischen Klimas während der Ablagerung dieser Schichten. Schon auf Grund dieser Untersuchungen wurde es wahrscheinlich, dasz die Bleichsandschicht einem milderen humiden Klima angehört, während die Humusortabteilung ein Produkt arktischer Klimaeinflüsse ist, wenigstens wenn man nicht annehmen will, dasz durch Zersetzung, Einsickern oder anderswie sich die erhaltenen Mikrofossilien genau immer in dieser postglazialen Klimafolge auffinden lassen, was sich kaum glauben lässt, wenn man sich Rechenschaft gibt über die ausserordentlich guten Konservierungsmöglichkeiten in diesen fortwährend stark sauren, oligotrophen Schichten mit ihren, die Pollenkörner umhüllenden Humusgele.

5. In den Bleichsandschichten wurden öfters Holzkohlenbröckchen und sogar -schichtchen aufgefunden, geradeso wie sie aus den Moorablagerungen bekannt sind. Letztere wurden mir von C. A. WEBER in 1927 zum ersten Male gezeigt in Profilen des Hellweger-Moores bei Bremen. Diese Brandmarken im Torf und im Bleichsande halte ich denn auch für Parallelerscheinungen.

6. In bestimmten Fällen (so zwischen den Örtlichkeiten Norg und Een und zwischen Een und Steenberg im Norden der Provinz Drente ; Lit. 3) sah ich Profile, wo die Bleichsandschicht Erratica enthielt. Die Steine von oft mehr als Faustgrösze blieben auf Strecken auf der Bleichsandabteilung beschränkt, während die unterliegende Bank und Decksandabteilung steinfrei waren.

Daraus könnten wir also den Schlusz ziehen, dasz es sich hier wieder um zwei geologisch verschiedene Ablagerungen handelt.

7. Die Fälle, wo im Sandprofile zwei Humusortsteinbänke übereinander auftreten, sind in unserm Lande äusserst selten. Mehr als zwei Bänke übereinander sind mir aus unserm Sanddiluvium nicht bekannt geworden. Die grosze Seltenheit dieser Erscheinung und ihr Auftreten über nur ganz kleine Strecken in alten Flugsandgebieten mit hohen Akkumulationsprofilen ist besonders bemerkenswert. Die zwischen den beiden Bänken befindlichen Sandschichten enthielten bei Anholt (Dr.) (Lit. 2) eine Bleichsandabteilung mit Laubholzpollenhäutchen (z. B. Buche und Ulme) eines milden humiden Klimas, während in der Bleichsandschicht über der obern Humusortsteinbank Tardenois-Artefakte und etwas höher, schon im Dünensande, neolithische (bezw. Bronzezeit-) Artefakte aufge-

funden wurden. Diese Funde deuten also auf ein sehr hohes Alter der Bankschichten, welche es in diesem Falle m.E. wahrscheinlich gemacht haben, dass sie den Würm I und Würm II Kältemaxima entsprechen, während die dazwischen auftretende Bleichsandschicht einer Bildung des Würm I—Würm II Interstadials entsprechen mag (Cf. die Strahlungskurve von MILANKOVITCH—KÖPPEN—WEGENER für 55° NB).

8. Die Dicke der Bleichsandschichten in den grösseren Heideflächen ist merkwürdig regelmässig (20—25 cm) und dies sowohl in der Ebene oder Niederungen wie auf den Anhöhen, wenigstens soweit sich Bänke darunter befinden. Es ist schwer dies mit der Ausflockungstheorie in Einklang zu bringen, denn im letzteren Falle würden die verschiedenen Grundwasserstände, die verschiedene Porosität des Bodens u. s. w. sicher eine Rolle bei den kolloidchemischen Prozessen gespielt haben, wodurch eine viel grössere Variabilität in der Dicke der Bleichsandschicht zu erwarten wäre. Dies ist aber nur der Fall, wo Flugsande (Erosionen) in der Nähe festgestellt werden konnten oder dort, wo eine „nachträgliche“ Bleichsandbildung stattfand (Bleichsandschichten bilden sich in unserm Klima auch heutzutage noch).

Diese regelmässige Dicke der Bleichsandschicht liesse sich besser verstehen, wenn man eine äusserst langsame, während Millennien sich durchsetzende Erhöhung der Heideoberfläche annimmt, welche Erhöhung verursacht wurde von abgelagerten Humusstoffen der Vegetationsdecke und dazwischen geratenen atmosphärischen Niederschlägen wie Sand und Staub (Lit. 5).

9. In Drente und S. O.-Friesland fand ich typisch fossile Brodelböden; auch solche wo im Profil die Brodelkessel mit Steinschutt die Humusortsteinbank durchragten, genauso wie es 1930 von ERNST BECKSMANN (Kiel) von dergleichen „Heidsandprofilen“ auf der Insel Sylt erwähnt worden ist (Lit. 1).

10. Die geographische Verbreitung der Bleichsandformationen und der Humusortsteinbildungen zeigt, soweit bekannt, merkwürdige Areale. Wenn einerseits die Unterlage (ganz verschiedene, feste Gesteine und Bodenarten!) nichts aussagt über die Lokalisierung der Humusortschichten (Cf. RAMANN, 1911, Lit. 12, und zu LEINIGEN, 1911, Lit. 9) und andererseits die Anwesenheit unter Wald-, Moor- oder Heidevegetation eine bestimmte Regelmässigkeit nicht erkennen lässt (v. LEINIGEN, Lit. 9), so scheint doch die geographische Verbreitung zu beweisen:

a. dass Bleichsandbildungen sich weit südlich fortsetzen und in subtropischen und tropischen Gebieten ihresgleichen finden, während dort die eigentlichen Humusortsteinbildungen schon längst aufgehört haben (wenigstens ausserhalb der Gebirge). Nur bei oder in nicht zu weiter Entfernung von Gebirgen findet man weiter südwärts diese Humusortbildungen (z. B. Pyrenäen, Alpen, Kaukasus, Schwarzwald, Vogesen, Rie-

sengebirge u. s. w.), namentlich wo diese Gebirge deutliche Glazialerscheinungen zeigen, also im Eiszeitalter von grösseren Eiskappen überlagert waren. So findet man noch Ortsteinbildungen in Spanien, Süd-Frankreich, Süd-Deutschland u. s. w. Aus Rumänien, Ungarn und dem Schwarzerdegebiet Russlands werden sie, soweit mir bekannt, nicht erwähnt;

b. dasz die Bleichsand- + Ortsteinbildungen in Europa ihr Hauptverbreitungsgebiet in Süd-England, die Normandie, Belgien, Holland, Nord-Deutschland, Dänemark, groszen Teilen von Skandinavien, Finland und dem nördlichen Mittelteil Russlands haben;

c. dasz die eigentlichen Podsolbildungen in der Hocharktis aufhören, während sie dort überfließen in die fast endlosen Humusreservoirs der Tundra, also des Dauerfrostbodens.

Im Groszen und Ganzen lässt die Sache sich so ansehen, dasz eben die Gebiete Bleichsand- + Ortsteinbildungen aufweisen, welche den schroffen Klimawechsel von arktisch bis warm-atlantisch (humid) durchgemacht haben. Die Humusortsteinbildungen sind allem Anschein nach beschränkt auf die Gebiete, wo wir eine Einwirkungssphäre des arktischen Klimas (Tundraklima!) noch nachweisen können (z.B. durch die Überreste der Dryas-Flora und -Fauna) oder diese annehmen können. Selbstverständlich wird eine genaue Kartierung und gleichzeitige Inventarisierung der subfossilen Funde des Diluviums uns genauere Aussagen ermöglichen.

Auf Grund aber der obenerwähnten zehn Argumente will es mir vorkommen dasz schon jetzt mit ziemlich groszer Wahrscheinlichkeit der Schlusz zu ziehen ist: dasz Bleichsand und Humusortstein Bildungen entgegengesetzter Klimate darstellen, in dem Sinne, dasz Bleichsand ein Produkt feuchter milderer Klimate und Humusortstein eine arktische Hinterlassenschaft ist ¹⁾.

Die Natur hätte hier also zwei sehr prägnante und dauerhafte Farbspuren des Klimawechsels fixiert.

¹⁾ Das örtliche Fehlen der Humusortsteinbänke im erwähnten Verbreitungsgebiet kann erklärt werden: erstens, durch Erosionen; zweitens, durch die Eisüberlagerung während der Abschmelzperiode der letzten Restgletscher. Als die letzten Gletscher noch anwesend waren (z.B. jetzt noch in den Alpen), war das Klima des Randgebietes dieser Gletscher schon längst nicht kalt genug mehr für die Ausbildung einer Tundra. Deshalb mögen die Bänke in den Gebieten des Rohhumusgürtels und der Waldgrenze in Gebirgen sowie im hohen Norden fehlen.

LITERATUR (Auswahl).

1. E. BECKSMANN, Fossile Brodelböden des Roten Kliffs (Sylt) etc. (Neues Jahrb. f. Mineralogie etc., Beil. Bd. 66, Abt. B, 1931.)
2. W. BEIJERINCK, Die mikropaläontologische Untersuchung äolischer Sedimente etc. (Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 1933.)
3. ———, Erratica des Würmglazials in den Niederlanden. (Ebenda.)
4. ———, Ueber Tundrabänke etc. (Holl. m. deutsch. Zusammenfassung.) (Tijdschr. Kon. Nederl. Aardr. Gen., 1933.)

5. W. BEIJERINCK, Der Ursprung unserer Heideflächen. (Holl. m. deutsch. Zus.) (Nederlandsch Kruidkundig Archief, 1933.)
6. ——— u. H. J. POPPING, Eine paläolithische Niederlassung am Kuinderthal etc. (Holl. m. deutsch. Zus.) (Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen. 1933.)
7. E. BLANCK, Handbuch der Bodenlehre, Bd. II u. IV, Berlin, 1929/30.
8. P. EHRENBURG, Die Bodenkolloide. Dresden u. Leipzig, 1915.
9. W. GRAF ZU LEINIGEN, Bleichsand und Ortstein. (Abh. naturf. Ges. Nürnberg, Bd. 19, 1911.)
10. P. E. MÜLLER, Bidrag til de Jydske Hedesletters Naturhistorie etc. (Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Biol. Medd. IV, 2, 1924.) M. franz. Résumé.
11. H. PIESKER, Vorneolithische Kulturen der südl. Lüneburger Heide. (Veröffentl. d. Urgesch. Samml. d. Prov. Mus. Hannover, 1932.)
12. E. RAMANN, Bodenkunde. Berlin, 1911.
13. H. SCHÜTTE, Der Aufbau d. Weser-Jade-Alluviums. (Schrift. Ver. Naturk. a. d. Unterweser, N. F. 1931.)
14. U. SPRINGER, Die organischen Stoffe, besonders die echten Humusstoffe und ihre Zustandsformen im Boden. (Soil Research, 1932, nr. 2).
15. FR. WEIS, Further investigations on danish heath soils and other podsoles. (Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Biol. M. X, 3, 1932.) Dän. m. engl. Résumé.
16. P. WOLDSTEDT, Einige Probleme des osteuropäischen Quartärs. (Jahrb. Preusz. Geol. Landesanstalt, Bd. 54, 1933.)

Wijster (Dr.), Holland, 27 Dezember 1933.

Botany. — *Über die Atmung und Katalasewirkung im Sauromatumkolben.* Von A. W. H. VAN HERK und N. P. BADENHUIZEN. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

In den Blütenkolben der Aroidee *Sauromatum guttatum* finden sehr intensive Oxydationsprozesse statt. Nicht allein ist der Sauerstoffverbrauch gross und eine Wärmeentwicklung leicht nachzuweisen, auch zeigen sie eine starke fermentative Tätigkeit. Auf Veranlassung von Herrn Prof. WEEVERS haben wir die Untersuchung dieser enzymatischen Wirkungen und der chemischen Reaktionen, welche in den Blütenkolben vor sich gehen, in Angriff genommen. In dieser ersten Mitteilung beschränken wir uns auf die Atmung, die Katalasewirkung und deren Zusammenhang.

1. Die Atmung.

Die Atmung ist nach der manometrischen Methode Warburgs bestimmt worden. Jedes Atmungsgefäß enthält 1.5 ccm Phosphatpuffer $p_H = 6.8$; 100—200 mgr *Sauromatumkolben* und im Einsatz 0.2 ccm 5% KOH. Die Versuchstemperatur ist 26° C.

Der Kolben besteht aus einem fertilen Teil und einem sterilen Anhängsel. Wir haben diesen Appendix verwendet, da nur in diesem die oben erwähnten Stoffwechselvorgänge stattfinden. Ihre Spitze hat im Inneren ein festes, gelbes Mark und zeigt die aktivste Wirkung; die untere Abteilung ist mit weissem, lockerem Mark gefüllt; ihre Aktivität ist gering. Unmittelbar vor

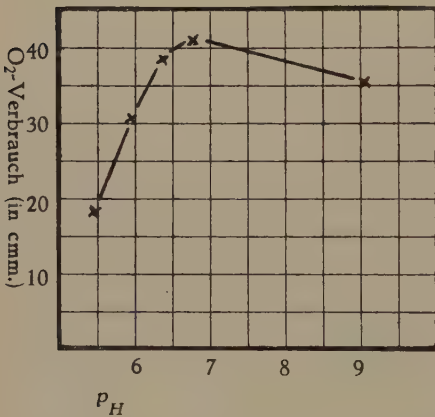
und nach dem Aufblühen ist der Sauerstoffverbrauch gross. Später nimmt die Atmung schnell ab; dabei tritt eine Verfärbung des sterilen Teiles auf.

Zerreibt man einen Kolben, so bleibt seine Atmungsgrösse mehrere Stunden konstant; z.B. war diese in einem Versuche 132 cmm für 200 mgr Frischgewicht in 30 Min. Später kann sie sich stark verringern.

Die folgenden Versuche über die Atmung des Sauromatumkolbens sind angestellt worden.

A. Die Atmung (d.h. die O_2 -Aufnahme) ist im Spitzenteil des Anhängsels stärker als in der basalen Hälfte; es fragt sich jetzt, ob diese Differenzen durch eine ungleiche Menge des Verbrennungsmaterials zu erklären sind. Deshalb haben wir zuerst den Einfluss der Glukose untersucht (Konzentration $1\frac{1}{2}$ —3 %). Es stellte sich heraus, dass Hinzufügung dieses Zuckers keine Änderung in der Atmung hervorbringt. Das Atmungsferment ist also in Hinsicht auf Glukose gesättigt. Da dasselbe Resultat auch bei zerkleinertem Material erreicht wird, kann die etwaige Wirkung einer ungenügenden Permeabilität für Glukose ausser Betracht gelassen werden. Hat man jedoch die Kolben längere Zeit im Eisschrank aufbewahrt und untersucht dann den unteren Teil des Anhängsels, so findet man, dass das Atmungsferment ungesättigt ist.

B. Weiter haben wir die Abhängigkeit der Atmung von der Wasserstoffionenkonzentration des Reaktionsgemisches untersucht unter Verwendung von Phosphat- oder Zitratpuffer. In beiden Fällen erhalten wir ein



relativ breites Optimum, welches sich innerhalb $p_H 6.6$ — $p_H 8$ erstreckt (Abbildung 1). Bei schwach saurer Reaktion fällt die Atmung stark herab; in den Phosphatlösungen etwas stärker als im Zitratpuffer. Ob es sich dabei um eine spezifische Wirkung der Phosphate handelt, mag unentschieden bleiben; in höheren Konzentrationen haben sie eine schwach hemmende Wirkung.

C. Das Ergebnis der Versuche über die hemmende Wirkung der Blausäure, Schwefelwasserstoff, Urethan und Kohlenmonoxyd stimmt

mit dem Resultat der Warburgschen Experimenten überein; nur sind die Atmungshemmungen nicht so intensiv. So bewirkt 10^{-3} mol HCN keine vollkommene Hemmung, diese ist etwa 50 %. (Mittelwert aller Versuche). Das Kohlenmonoxyd setzt die Atmung stark herab (z.B. 70 % bei einer Mischung von 75 % CO , 5 % O_2 und 20 % N_2). Für die Urethanversuche sind diese Werte durchschnittlich 28 % (0.2 mol Lösung), 18 % (0.1 mol) und 12 % (0.05 mol). In allen diesen Versuchen ist das Atmungsferment gesättigt.

2. Die Katalase.

Katalase zerlegt Wasserstoffsuperoxyd in Wasser und Sauerstoff. Das Ferment findet sich in fast allen Zellen, jedoch kommt es nur ausnahmsweise in grösserer Menge vor. Ein besonders günstiges Ausgangsmaterial für die Darstellung von hochaktiven Präparaten bilden die Leber und das Blut höherer Tiere; letztere hat HENNICHs eine Reinigungsmethodik ausgearbeitet, welche einen wesentlichen Fortschritt hinsichtlich ihrer Reindarstellung bedeutet.

Ein Kolben von Sauromatum wird mit Eis möglichst fein zerrieben und Alkohol bei Gefriertemperatur hinzugefügt bis die Konzentration etwa 70 % ist. Die Flüssigkeit wird abfiltriert und die zurückgebliebene Masse reichlich mit Wasser durch Schütteln extrahiert. Durch Filtration letzterer Flüssigkeit erhält man eine farblose Enzymlösung. Wiederholt man die Extraktion, so zeigen die weiteren Filtrate noch eine starke Katalasewirkung. Eine fraktionierte Alkoholfällung haben wir zur Gewinnung dieses ersten Rohproduktes nicht benutzt.

In Anwesenheit einer grossen Menge Enzyms im Vergleich zum Wasserstoffsuperoxyd ist ihre Spaltung durch eine monomolekulare Reaktionsgleichung darzustellen; die Reaktionskonstante ist bei gleicher H_2O_2 -Konzentration der Enzymmenge proportional. Deshalb definiert HENNICHs die katalytische Fähigkeit der Katalase (Kat. f.) durch den Quotienten dieser Konstante und das Trockengewicht der Enzymlösung in gr. Leider hat er in seiner ersten Arbeit das Trockengewicht berechnet pro 1000 ccm der Reaktionsmischung, später jedoch pro 50 ccm. Er wählt jetzt also die Kat. f. $20 \times$ so gross; wir wollen ihm in dieser Auffassung folgen. Die Enzymmenge ist dem Produkt des Enzymtrockensubstanzen in gr und der entsprechenden Aktivität proportional.

Vielfach erhielt man bei der Berechnung der monomolekularen Konstanten während des Reaktionsverlaufes einen variierenden Wert (STEPHAN, u.a.). Wir haben dies näher untersucht und können die Angaben HENNICHs durchaus bestätigen.

In den pflanzlichen Zellen ist die vorhandene Katalasemenge sehr gering. Pro 100 gr Frischgewicht ist diese in den Samen von Cannabis sativa 16.1; in Weizenkörner 1.04; im Apfel ungefähr 1.2. Dieser Wert ist in den Weizenkeimpflanzen 2-mal grösser, in denen von Cannabis etwa 6, und dies dürfte wohl als der normale Mittelwert in den pflanzlichen Geweben betrachtet werden. Vergleicht man diese Angaben mit denen von HENNICHs, der die Katalasemenge in 100 gr frischer Pferdeleber auf etwa 2000 bestimmte, so liegt es auf der Hand weshalb man vorzugsweise diese als Ausgangsmaterial der Katalasereindarstellung wählte!

Wir erhalten in einem Versuch aus etwa 30 gr Frischgewicht des Sauromatumkolbens nach Alkoholfällung und einmaliger Wasserextraktion 500 ccm Enzymlösung mit Trockengewicht 0.195 gr und Kat. f. 292.3, also eine Enzymmenge pro 100 gr Frischgewicht von 190. Das Präparat erhielt

sich im Eisschrank unverändert, nach drei Wochen ist die Aktivität um 10% verringert. In einem zweiten Versuch ist die Kat.f. 246.8; die Enzymmenge 120.3 (300 ccm). HENNICHs extrahierte in dieser Weise etwa 40% der in der Leber vorhandenen Enzymmenge; 100 gr Leber lieferte 0.7—0.8 gr Trockengewicht mit Kat.f. 1000, mithin eine Enzymquantität 700—800. Also ist in den Sauromatumkolben die Katalasemenge mindestens 12—100 mal grösser als in den anderen pflanzlichen Objekten; sie ist $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{7}$ Teil von der Menge, welche sich im günstigsten Ausgangsmaterial befindet. Dabei müssen wir auch in Betracht ziehen, dass prozentualiter die Trockengewichte beim Kolben viel geringer sind als bei der Leber.

Eine weitere Reindarstellung des Enzyms haben wir durch Kaolinadsorption und Elution mit Phosphat vorgenommen; nach 40 Stunden Dialyse im Kollodiumsack gegen destilliertes Wasser ergab die Lösung eine Kat.f. 2700, jedoch war dies mit einem grossen Präparatverlust verknüpft. Wegen Materialmangel konnten wir diese Versuche nicht weiter fortführen; die Aktivität war etwa $\frac{1}{16}$ von dem Höchstwert, den man mit Leberkatalase erreicht hat (HENNICHs: 25000; v. EULER: 43000).

Wir bestimmten die Abhängigkeit der H_2O_2 -Spaltung von der Wasserstoffionenkonzentration. In Einklang mit MORGULIS und RONA finden wir die Aktivität im alkalischen Milieu unverändert; die Fermentreaktion zeigt ein relativ breites Optimum, welches sich über $p_H = 6.5$ —8 erstreckt. Bei niedrigerem p_H ist sie stark herabgesetzt durch eine Fermentschädigung. Die monomolekulare Konstante nimmt während des Versuches sehr wesentlich ab; die Reaktionsgleichung nähert sich zum bimolekularen Typus.

Das Verhalten der Blausäure zur Katalase ist vielfach bestimmt worden. Beobachtet wurde eine stark hemmende Wirkung; so bewirkt z.B. eine 10^{-5} mol Lösung HCN eine Hemmung von 45.4%.

3. *Der Zusammenhang zwischen Atmung und Katalasewirkung.*

Einige Autoren haben eine Beziehung zwischen dem Enzym Katalase und den Oxydationsprozessen der Zelle konstatiert. Entweder beobachteten sie einen parallelen Verlauf der Atmung und Katalaseaktivität, — meistens in keimenden Samen oder reifenden Früchten (MORINAGA; CHOATE; GUSTAFSON; APPLEMAN), — oder sie stellten fest, dass beide in derselben Weise durch äussere Einflüsse variiert werden (BURGE; APPLEMAN).

Demgegenüber gelangen andere Forscher in ähnlichen Experimenten zu ganz anderen Resultaten; von einer Korrelation zwischen beiden Prozessen konnte nicht die Rede sein (FODOR; GRACANIN; RANJAN und MALLIK; RHINE).

Wir möchten zu diesen Arbeiten Folgendes bemerken. Vielfach hat man die Wirkung der Katalase und der Grösse der Atmung nicht imselben Moment und im gleichen Pflanzenmaterial bestimmt, sondern die Resultate früherer Untersuchungen benutzt (APPLEMAN; BURGE; CHOATE). Da die äussere Umstände einen grossen Einfluss auf die Intensität der Atmung

haben, so bleibt es in diesen Fällen mehr oder weniger dem Zufall überlassen ob eine Korrelation zwischen den beiden Wirkungen festgestellt werden kann.

Aber auch wenn man diesen Bedenken Rechnung trägt, so ist doch keine Übereinstimmung zu erwarten. Erstens wird durch die Zerkleinerung der Zellen die fermentative Tätigkeit der Katalase mit fortschreitender Strukturzerstörung immer mehr gehemmt; in besonderen Fällen vielleicht erhöht. Zweitens bestimmt man die Geschwindigkeit, womit die Katalase Superoxyd spaltet; ob und wieviel davon in der Zelle zersetzt wird, lässt sich aus diesen Versuchen nicht schliessen. Anders verhält es sich bei der Atmung. Hier messen wir den Stoffumsatz insofern dieser möglich ist unter den Bedingungen, welche in den Zellen vorherrschen. Bekanntlich kann die Atmung in der Mehrzahl der Fälle bloss durch die Zugabe von Glukose erhöht werden. Dass die Atmung in den keimenden Samen sich fortwährend vergrössert, braucht nicht die Folge einer grösseren Menge aktiven Atmungsfermentes zu sein, sondern kann auf eine Mobilisierung des Verbrennungsmaterials beruhen.

Das hier Vorgebrachte möge beweisen, dass diese Versuche die Frage nach der Korrelation zwischen Atmung und Katalasewirkung nicht gelöst haben. Spielt die Katalase eine Rolle bei der Verbrennung oder bei einer wichtigen Nebenreaktion, welche damit am Engsten verknüpft ist, so kann ihre Wirkung die Geschwindigkeit der Reaktion nur bei Höchstleistung der anderen beteiligten Fermente bedingen. Fügt man dann Katalase hinzu, so sollte die Oxydation vergrössert werden.

Zum Nachweis, dass die Katalaselösung die Atmung steigert, arbeiteten wir mit Gewebeschnitte eines Kolbens, dessen Atmungsferment gesättigt ist. Der Sauerstoffverbrauch wird gemessen und 0.4 ccm einer Katalaselösung (Enzymmenge 0.043; Trockengewicht 0.016 mgr; p_H : 6.8) in den Hauptraum umgekippt. Wir beobachteten eine Zunahme der Atmung (siehe Tab. 1). Immer sind Kontrollversuche angestellt worden, bei denen

TABELLE 1.

Gewebeschnitte (Kolben *Sauromatum guttatum*).

Der Versuch zeigt, dass die Atmung durch das Hinzufügen einer Katalaselösung gesteigert wird.

Der O_2 -Verbrauch ist im Warburg-Apparat gemessen. Phosphatpuffer $p_H = 6.8$. Im Einsatz *KOH*. Im Anhang 0.4 ccm. einer Katalaselösung mit Enzymmenge 0.043 und Trockengewicht 0.016 mgr. Temperatur $26^\circ C$. Das Atmungsferment ist gesättigt.

Gefässvolumina in ccm.	v_F : 1.60	v_F : 1.60
	v_G : 14.0	v_G : 13.1
Gefässkonstante in cmm.	1.30	1.22

TABELLE 1 (Fortsetzung).

Sauerstoffverbrauch:		
nach 5 Min.	8 cmm.	9 cmm.
10 Min.	17 cmm.	17 cmm.
15 Min.	27 cmm.	27 cmm.
Hinzufügen von	Wasser	Katalase
Sauerstoffverbrauch:		
nach 5 Min.	9 cmm.	10 cmm.
10 Min.	18 cmm.	23 cmm.
15 Min.	26 cmm.	32 cmm.
20 Min.	36 cmm.	46 cmm.

Daraus folgt:

$$\text{Förderung der Atmung} \frac{46-36}{36} = 28\%$$

keine Katalaselösung, sondern Phosphatpuffer oder Wasser hinzugefügt worden ist. Diese haben ein negatives Resultat.

Gewebeschnitte.
Prozentische Atmungszunahme
durch die Katalasewirkung.
(Enzymmenge: 0.043;
Trockengewicht: 0.016 mgr.)

0
10
20
28
28
33
Mittelwert: 19.8% ± 5

Wir haben die Versuche 6-mal wiederholt und das Resultat in einer Tabelle zusammengefasst. Der Mittelwert aller Atmungserhöhungen ist 19.8% ± 5. Die zugefügte Enzymquantität ist $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$ Teil der Menge, welche sich in den Gewebeschnitten befindet. Hiermit haben wir den Beweis geliefert, dass eine Korrelation zwischen Katalasewirkung und Atmung bestehen kann. Nur in einem Versuch konnten wir keinen Atmungszuwachs messen. In diesem Falle war die Katalase-aktivität bestimmt nicht der bedingende Faktor der Verbrennung.

Wir müssen gleich einige Bedenken gegen diese Versuche erheben. Die Katalaselösung ist nicht als ein chemisch reines Präparat zu betrachten. Es ist also a priori möglich, dass es einen Stoff enthält, welcher eine Oxydation hervorbringen kann. Jedoch gibt das Enzym mit einer 1% Glukoselösung keine Sauerstoffaufnahme; auch nicht wenn man 200 mgr Sauro-matumkolben hinzufügt, den man zuvor 3 Min. gekocht hat. Ebenso wenig wahrscheinlich ist es, dass das Katalasepräparat ein günstiges Verbrennungsmaterial für das Atmungsferment bildet, da letzteres gesättigt und

das Trockengewicht der Lösung sehr gering ist. Jedoch ist die Möglichkeit zu berücksichtigen, dass nicht die Katalase, sondern eine Verunreinigung derselben, ein Aktivator der Atmung sei. Weitere Untersuchungen mit reineren Präparaten müssten dies zeigen.

Auch möchten wir noch auf Folgendes hinweisen. Vergleicht man den Einfluss der Wasserstoffionenkonzentration auf die Atmung der zerkleinerten Zellen und auf die Katalase-aktivität, so finden wir eine auffallende Übereinstimmung. Da auch hier die Atmung durch Hinzufügung von Glukose ihren Maximalwert hat, beweist dieser Versuch, dass ein direkter Zusammenhang zwischen den beiden Prozessen besteht.

LITERATUR.

1. APPLEMAN, C. O.: Some observations on catalase. *The Botanical Gazette*, **50**, 1910, 182—193.
2. ———: Relation of oxydases and catalase to respiration in plants. *American Journal of Botany*, **3**, 1916, 223—234.
3. ———: Respiration and catalase-activity in sweet corn. *American Journal of Botany*, **5**, 1918, 207—210.
4. BURGE, W. E., BURGE, E. L.: Effect of temperature and light on catalase content of *Spirogyra*. *The Botanical Gazette*, **77**, 1924, 220—225.
5. CHOATE, H. A.: Chemical changes in wheat during germination. *The Botanical Gazette*, **71**, 1921, 409—426.
6. V. EULER, H., JOSEPHSON, K.: Über Katalase. *Liebigs Annalen der Chemie*, **452**, 1927.
7. GRACANIN, M.: Ein Beitrag zur Kenntnis der Katalasewirkung bei autotrophen Pflanzen. *Biochemische Zeitschrift*, **168**, 1926, 429—443.
8. GUSTAFSON, F. G., CLARK, I., SHAW, D. A., WARWEG, E.: Catalase-activity in Tomato fruits at different stages of their development. *Plant Physiology*, **7**, 1932, 155—161.
9. HENNICH, S.: Studien über Leberkatalase. *Biochemische Zeitschrift*, **145**, 1924, 286—306.
10. ———: Zur Kenntnis der Katalase und ihrer Beziehung zu biologischen Oxydationen. 2. Mitteilung. Über Leberkatalase. *Biochemische Zeitschrift*, **171**, 1926, 314—372.
11. FODOR, A., FRANKENTHAL, L., BILETZKY, M.: Über das Dehydrierungsvermögen von *Zea Mays* in Anwesenheit von Pflanzensäuren als Wasserstoffdonatoren und den Antagonismus zwischen Dehydrase und Katalase. 8. Mitteilung. Über die Atmungsvorgänge in Pflanzenorganen. *Biochemische Zeitschrift*, **238**, 1931, 268—278.
12. MORGULIS, S.: A study of the catalase reaction. *The Journal of Biological Chemistry*, **47**, 1921, 341—376.
13. MORINAGA, T.: Catalase activity and the aerobic and anaerobic germination of rice. *The Botanical Gazette*, **79**, 1925, 73—85.
14. RANJAN, S., MALLIK, A. K.: A study of the catalase reaction, with special reference to respiration in plants. *The New Phytologist*, **30**, 1931, 355—382.
15. RHINE, L. E.: Divergence of catalase and respiration in germination. *The Botanical Gazette*, **78**, 1924, 46—68.
16. RONA, P., DAMBOVICEANU, A.: Untersuchungen über die Leberkatalase. *Biochemische Zeitschrift*, **134**, 1923, 20—39.
17. STEPHAN, J.: Untersuchungen über das Verhalten der Katalase im Samen. (1. Mitteilung) *Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik*, **75**, 1932, 771—809.

Amsterdam, Pflanzenphysiologisches Institut der Universität.

Anatomy. — *The electric organ and its innervation in Malapterurus electricus.* By C. STUART and C. J. KAMP. (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

Upon macroscopic examination of *Malapterurus*, of the family of the Siluridae, it appears that its electric organ is situated *in* the skin, extending in front laterally to the pectoral fin, dorsally and ventrally more towards the head, behind dorsally and ventrally to the adipose and anal fins, laterally farther towards the tail, separated from the musculature by a tendonlike membrane. Laterally the organ is thickest.

About the origin of this interesting organ opinions differ: FRITSCH first thought it to be derived from the cutaneous muscle system, afterwards he was inclined to derive it from gland cells of the skin. Against this pleads the fact that both systems are still completely intact, also in the full-grown animal. It might further be that the whole system developed early from separate muscle cells or gland cells respectively. It might, however, also have originated elsewhere directly as electroblasts (BALLOWITZ), which have secondarily migrated into the skin.

Comparison with the above named tissues of other animals of the same family shows no essential differences except in the absence of the electric organ, which consequently does not point to a simple arising of the electric organ from another organ or tissue.

This is different in the other electric fishes.

The organ as a whole may best be studied by means of tearing-preparations. The organ then appears to consist of plates, situated against the back wall of compartments, the smallest diameter of which lies in fronto-caudal direction and which are shoved together without any regularity, so that regular rows of plates are out of the question here.

The connective tissue of the compartment walls is a continuation of the ordinary connective tissue of the cutis.

Each organ consists of two halves separated by a connective tissue septum in the median line. FRITSCH thinks that this septum only arises secondarily in older specimens and that originally the organ is built as a whole.

Against this pleads the fact that the cutaneous nerves leading to the trunk pass into the dorsal and ventral median septum, but do not penetrate the electric organ in other places.

The organ is separated from the cutaneous epithelium by a fascia of thick connective tissue. Inside BALLOWITZ describes a somewhat thinner

fascia, firmly connected by crosswise running fibres with the deeper lying organs. The fact, however, that the skin and organ are very easily separated from the underlying tissue, certainly does not point to a close connection between them; the contact rather seems to be kept up, some loose connective tissue excepted, by blood-vessels and nerves only.

A microscopic transverse section of the skin shows the following layers (Cf. fig. 1).

1. *Paved-epithelium* consisting of many layers, without keratose and strewn with numerous gland cells of a slightly different colour and containing many vacuoles. The bottom layer of cells contains many pigment-bearing cells (chromatophores).

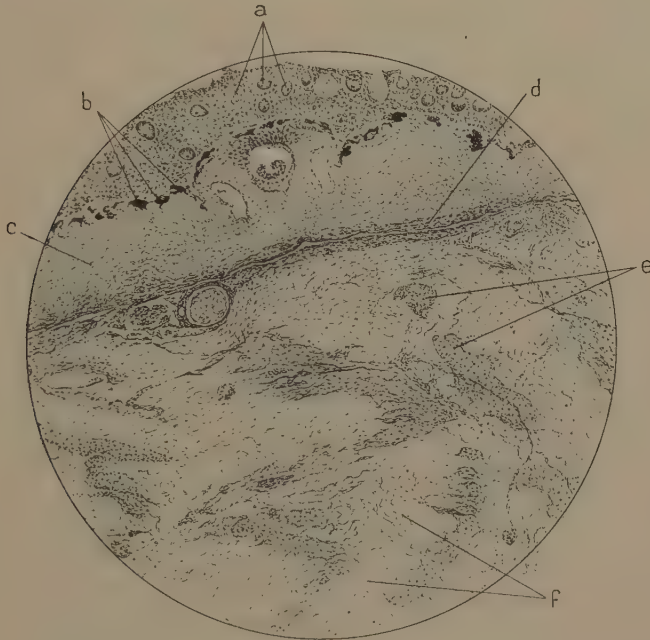


Fig. 1. Perpendicular section of the skin and the underlying electric organ of *Malapterurus electricus*.

a = epithelium with gland cells; b = chromatophores; c = subcutaneous tissue with smooth muscle fibers; d = fascia electrica; e = electroplaxes; f = connective tissue.

2. A layer of smooth muscle fibres, arranged in circular direction, parallel to the skin.

3. The exterior electric fascia. This is a layer of connective tissue containing bloodvessels and nerves.

4. The electric organ itself (fig. 1, 3 and 4).

5. A much thinner layer of muscles, consisting of smooth muscle fibres running in mutually perpendicular direction, but obliquely with respect to the skin.

6. A loose layer of connective tissue with blood-vessels and nerves and

here and there a peculiar connective tissue formation consisting of concentric lamellae, the meaning of which is not clear.

7. A distinct fascia encloses the whole on the inner side (fascia sub-electrica).

The organ itself.

If the word *electroplax* is used as a collective name for the electric element, the electroplax in *Malapterurus* consists of a plate, one of which is situated in each compartment and which, separated from the front wall of the compartment by a mucous tissue layer (see figures 1, 2 and 4), is, however, directly connected with the hind wall.

The material having been in alcohol for some time the plates are shrunken; the interjacent tissue on the other hand is clearly perceptible. In fig. 2 (tangential section), where the plate has been cut perpendicularly, the

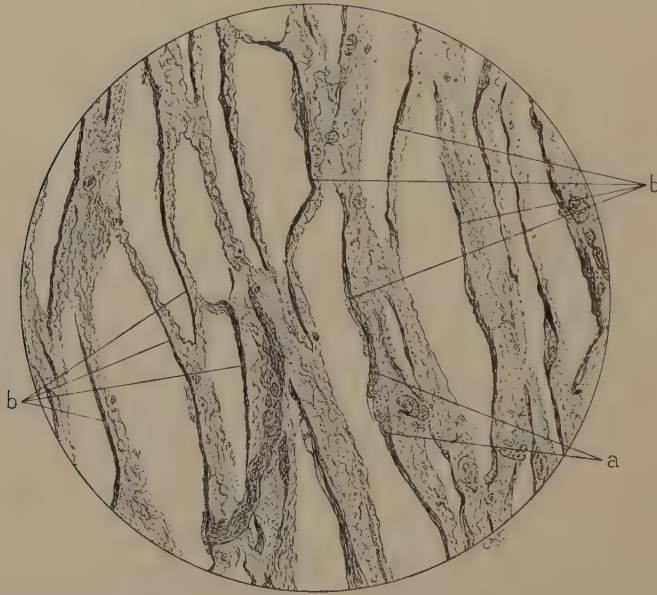


Fig. 2. Section parallel to the skin of *Malapterurus electricus* showing the beginning of the funnel (a) and the electroplaxes (b).

shrivelled plate can be seen as a line against the back wall of the compartment.

The *electroplax* is a thin disc with turned up edge. Diameter 0.81—1.12 m.m. The centre of the disc is funnel-shaped, the funnel-tube pointing backwards where the nerve ends. What is lying outside this region is called the peripheral part.

The *peripheral part* is thickest round the funnel-region and becomes thinner towards the edge. The edge has a thickening pointing in forward direction which makes it seem to be turned up. Sometimes also a thickening in backward direction occurs. The edge is hardly ever smooth, but has

indentations. The plates have a lobed shape; in the marginal parts of the organ they are more irregular. While at the front there are certain elevations in this tissue there is some difference of opinion about the existence of such elevations at the back. BALLOWITZ noticed eminences both in front and behind, the shape and size of which were influenced by the reagents he had used.

The central part bulges forward, thus causing the plate cavity, bounded at the back by a marginal groove. The funnel cavity ends blindly. On the funnel tube can be distinguished a foremost thickened part with an uneven surface and a hinder part, even and thin and ending in a terminal knob.

In front on the inner anterior wall of the funnel and its edge we see many papillae and projections (up to 30) that do not, however, occur on the floor and backpart of the side-walls. Radial ridges spring from the ring-wall, flattening soon towards the periphery, often covered with projections. Some meet in one radius. The radial ridges are divided at the end. The ring-wall is not equally high everywhere. The back wall of the funnel too is covered with ridges and projections. The papillae of the funnel-wall may pass to the tube, but a papilla may also end and form the floor of the funnel cavity. The funnel tube is easily ruptured here, the more so as the connective tissue round the tube is also looser at that place. So an artificial hole in the funnel may arise. Also the tube is covered with ridges, papillae and grooves.

The terminal knob takes up the nerve-ending, which gives rise to the formation of deep indentations. The nerve sheaths continue into the connective tissue covering the tube, that bends immediately out of the plate cavity and pursues its course parallel to the flat part.

Structure of the plate.

Plate and tube are covered with the electrolemm. This is very thin at the terminal knob but thick on the flat part of the plate. It is stainable with aniline stains or iron-haematoxyline. As in *Gymnotus* it never breaks away from the plate. In *Raja* it does.

Outside against the electrolemm distinct cells are seen but in or inside the membrane no nuclei are observed.

Structure of the peripheral part.

Inside the electrolemm and perpendicular to it small rods are fixed, terminating freely caudally in a rather filiform way, in front more rod-shaped. In horizontal sections they may be seen as small dots (fig. 1 and 3).

A network of rods, as in *Torpedo*, does not occur in *Malapterurus*. The anterior rods of the front resemble those of *Torpedo*, the posterior rods those of *Gymnotus*.

The remainder of the plate consists of a network of thin fibrils containing a semi-fluid substance. The direction of the fibrils is mainly

perpendicular from the anterior surface to the back, but may be different (fig. 3). This same network is found in all electric organs. Owing to the fixation a considerable shrinkage has occurred in it, so that it often

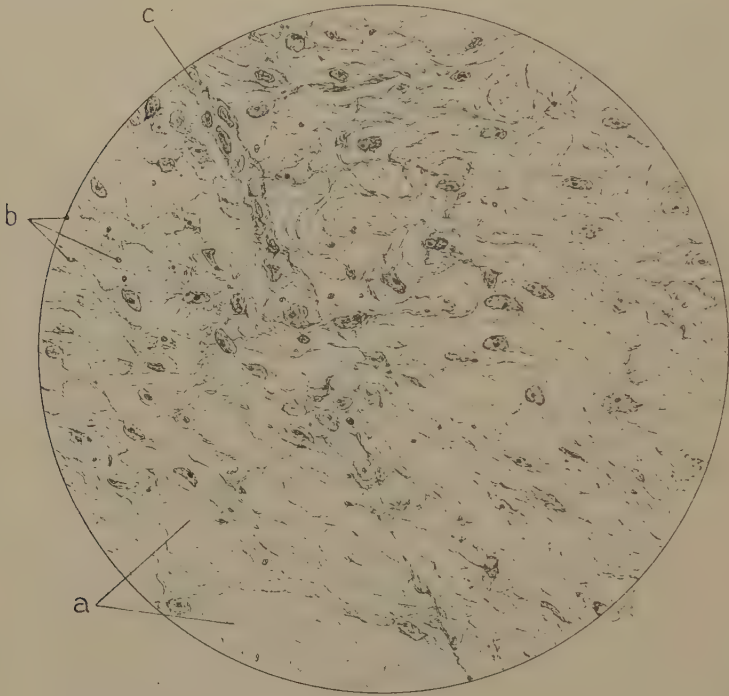


Fig. 3. Longitudinal section of the electric plate of *Malapterurus electricus*. The dots *a* are transverse sections of the electric rods, *b* = vesicles, *c* = capillary.

appears as a single line only in the middle of the plate. This is called the Pacinian line. The plate further contains round or elliptic nuclei with a large nucleolus and a thick nuclear membrane (fig. 3).

Out of the surroundings of the nuclei, fibrillae are turning away, especially to the anterior surface, forming spider-like figures (fig. 3). They are thicker than the other fibrillar network and show thickenings and vesicles. There are, however, also vesicles without fibrillae (fig. 3). They do not occur in *Gymnotus* and have nothing to do with nerve-endings.

The structure of *funnel* and *funnel-tube* is about the same. At the terminal knob the small rods are probably wanting and the general structure is somewhat finer.

Innervation of the electric organ.

Each half of the organ receives a nerve which emerges from a large ganglion-cell, situated in the anterior horn of the third segment of the spinal cord (see fig. 5 and 6).

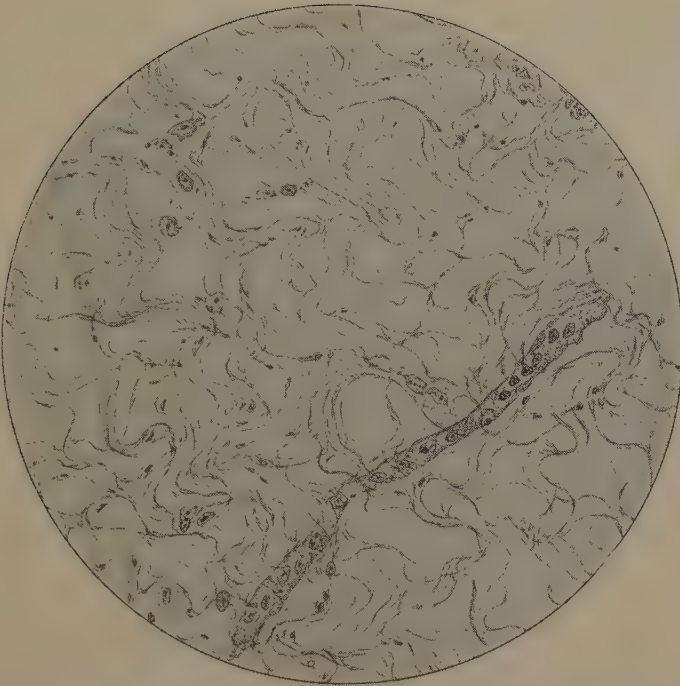


Fig. 4. Intermediate connective tissue between the electroplaxes of *Malapterurus electricus*.

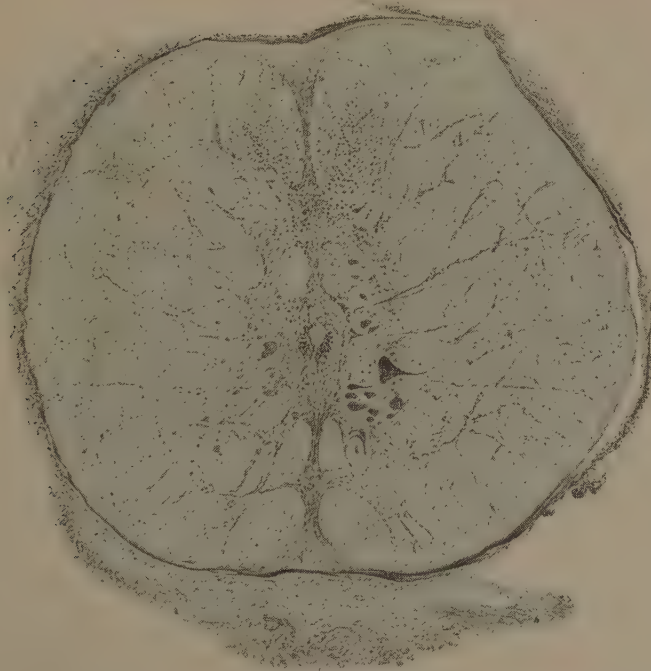


Fig. 5. The large cell on the right is the rootcell of the right electric nerve of *Malapterurus electricus*. Third spinal segment.

According to most writers the neurite passes out by the ventral root. It has also been described emerging by dorsal motor branches, as in

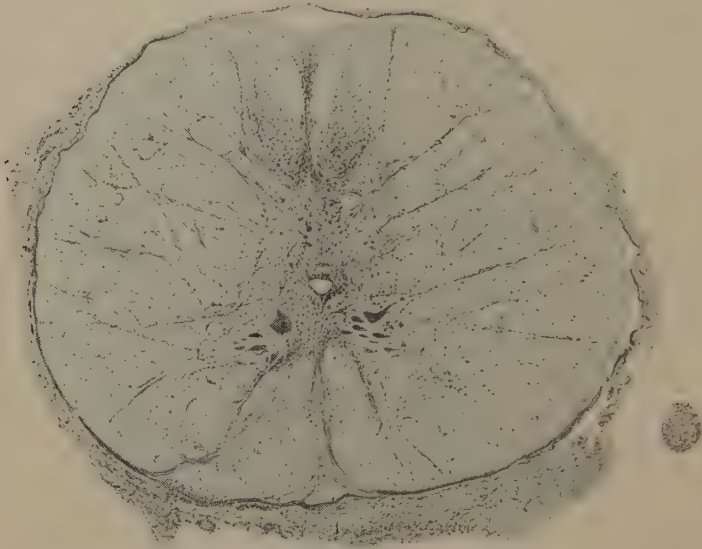


Fig. 6. The large cell on the left is the root cell of the left electric nerve.
Third spinal segment of *Malapterurus electricus*.

Torpedo, where the organ is innervated by branchial nerves. (VII, IX, and X). The innervation may probably give an indication about the origin of the organ. For if it is innervated by visceral nerves, this points to its having originated from smooth musculature, eventually glands. If on the other hand the nerve emerges with the ventral root, which is most likely considering the position of the cell, this would point rather to its originating from somatic elements which have secondarily acquired a position in the skin.

The nerve reaches the organ frontally between its first and second fifth part and goes on together with the arteria and vena electrica, covered by the fascia subelectrica. Close to the organ the nerve splits up in the organ dichotomously or into several branches, but no plexus-like connections are formed. Every plate receives one myelinated terminal nerve running to the terminal knob and forming there a spindle-shaped swelling. The exterior cover passes on to the funnel-tube which, however, is not a continuation of the nerve. The final branches of the nerve are lying against the terminal knob, but do not merge into it.

LITERATURE.

- BABUCHIN, Die Nervenendigungen in dem elektrischen Organ des afrikanischen Zitterwelses (*Malapterurus electricus* Lacépède) Anatomischer Anzeiger. Bd XV 1898, N^o. 7 (p. 85).

- BALLOWITZ, E., Das electrische Organ des afrikanischen Zitterwelses (*Malapterurus electricus* Lacépède). Jena 1899.
- BILHARZ, Das electrische Organ des Zitterwelses. Leipzig 1857.
- BOLL, Die Structur der electrischen Platte von *Torpedo* und *Malapterurus*. Centralblatt f. die Medizin. Wissenschaft, Jahrg. 1874 (p. 389).
- FRITSCH, G., Übersicht der Ergebnisse einer anatomischen Untersuchung über den Zitterwels (*Malapterurus electricus*). Sitzungsber. Akad. Berlin, Jahrg. 1886, II. Halbbd.
- Die electrischen Fische. I. Abtheilung: *Malapterurus electricus*. Leipzig 1887. II. Abtheilung: Die *Torpedineen*. Leipzig 1890.
- MANN, G., Die fibrilläre Structur der Nervenzellen (Riesenganglienzellen) des *Malapterurus*. Verhandl. der Anatomischen Gesellschaft auf der 12. Versammlung in Kiel vom 17—20 April 1898. Jena 1898 (p. 39—40).

Medicine. — *Urea-Catatonie*. By F. J. NIEUWENHUYZEN, assistant at the laboratory of clinical neuro-physiology (Dr. H. DE JONG) of the neurologic clinic (Prof. Dr. B. BROUWER) of the University of Amsterdam. (Communicated by Prof. B. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of January 27, 1934.)

It has been proved that different human biological products are able to cause the syndrome of experimental catatonie¹). It is known that catatonic phenomena occur in some cases of clinical uraemia. To answer the question as to whether the increased urea of the blood in clinical uraemia is responsible for the production of catatonic phenomena, twenty-nine mice were injected subcutaneously with solutions of urea in water, in varying amounts. The result was that urea was proved capable of causing the complete syndrome of catatonie. The following shows some of the results obtained:

Example I.

A mouse of 14 grams, placed on the top of a vertical stand, walked spontaneously down to the foot before the injection. When hung up by its forelegs on a horizontal wire, the mouse climbed on it. The leg test was negative: after having turned the animal on its side, so that one of its hindlegs was in an abnormal position, this abnormal side-position of the leg was immediately corrected.

¹) H. DE JONG: Zeitschr. f. d. ges. Neur. u. Psych. Bd. 139, H. 3—4, p. 468, 1932.

Nov. 20, 1933

- 4 h. 23': Injection of 0.6 cc. of a 20 % solution of urea in water. After the injection the mouse, placed again on the top of the stand, spontaneously walked down and also climbed on the horizontal wire, when it was hung on it by its forelegs.
- 4 h. 24': The mouse was very convincingly cataleptic and showed a strongly positive leg test: an abnormal position of the sideward stretched leg was not corrected. Placed on the top of the stand, the mouse did not run away after its tail was pinched five times. Hung up by its forelegs on the horizontal wire, it clung to it and remained hanging on it 40 seconds by its forelegs, while the hindlegs were drawn in close to the body.
- 4 h. 30': The catalepsy disappeared: the mouse walked down from the stand after its tail was pinched once. Leg test was negative.
- 4 h. 42': The mouse was negativistic: the animal allowed itself to be shoved forward "en bloc", and after the shoving had ceased it ran backwards a great distance.
- 4 h. 45': The mouse walked backwards spontaneously. Actiontremor was present.
- 4 h. 50': The mouse showed clonic convulsions in the fore- and hindlegs.
- 4 h. 52': Mouse died!

Example II.

A mouse of 18 grams walked, when placed on the top of the stand, spontaneously down to the foot before the injection. The leg test was negative.

Nov. 13, 1933

- 12 h. 56': Injection of 0.8 cc. of a 20 % solution of urea in water. After the injection the mouse, placed again on the top of the stand, spontaneously walked down and showed a negative leg test.
- 12 h. 58': The mouse was cataleptic. Placed on the top of the stand, the mouse did not run away after its tail was pinched. The leg test was positive: after having turned the animal on its side, the sideward stretched position of the hindleg was not corrected.
- 1 h. 00': The mouse walked down from the stand after its tail was pinched. The leg test was positive.
- 1 h. 02': The mouse cleaned itself and climbed spontaneously upon the stand. The leg test was still positive.
- 1 h. 45': The mouse climbed spontaneously upon the stand. The leg test was yet negative. The mouse cleaned itself.

The urea-catatonia, induced in the manner described above, is of a very passing nature and of short duration. In man catatonia during clinical uraemia has been observed only rarely, while in our laboratory it was not yet observed in two cases of experimental uraemia, induced both in a dog and a cat by operation by D. J. KOK and H. DE JONG. The results of these experiments were as follows:

In a dog experimental uraemia was induced by the removal first of one kidney and fourteen days later of the second. At appointed times a venapuncture was done and the blood urea content was determined by the writer according to the method of Ambard-Hallion. The animal survived the last operation five days. The first day after the operation the blood urea had increased to 1560 mG/L and after four days reached 5170 mG/L. It is to be noted here, that the normal blood urea content of a dog is 300—400 mG/L on the average; that a blood urea higher than 1200 mG/L is to be

considered as toxic and one of 3000 mG/L as a lethal dose. The dog referred to was examined carefully each day till three hours before its death. At no time did it show catatonic phenomena. The animal continued normal voluntary movements and showed only some apathy.

A cat, both of whose ureters were tied, died on the fifth day. The blood urea determined after death was 5100 mG/L, the normal value before operation for this cat being 328 mG/L. Catatonic phenomena were not observed. These experiments shall be continued, the amount of observations not being sufficiently until now.

We are grateful to the ROCKEFELLER-Foundation, whose aid enabled us to carry out this work.
